



ФАКУЛЬТЕТ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
МАТЕМАТИКИ И
КИБЕРНЕТИКИ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА



teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ТЕОРИЯ ИГР И ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

МОРОЗОВ
ВЛАДИМИР ВИКТОРОВИЧ

ВМК МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).



**БЛАГОДАРИМ ЗА ОЦИФРОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТА ВМК МГУ
СИНЦОВА МИХАИЛА АРТУРОВИЧА**

Содержание

Лекция I	5
Введение	5
Седловая точка и антагонистическая игра	6
Существование решения антагонистической игры	7
Лекция II	12
Условия существования максиминных и минимаксных стратегий при отсутствии седловых точек	12
Лекция III	18
Смешанные стратегии	18
Смешанное расширение антагонистических игр	20
Использование смешанных стратегий	20
Смешанное расширение непрерывных игр	23
Лекция IV	27
Свойства решений в смешанных стратегиях	27
Свойство дополняющей нежёсткости	29
Лекция V	34
Методы решения матричных игр	34
Доминирование строк и столбцов	34
Графический метод решения матричной игры	37
Сведение решения матричной игры к паре двойственных задач линейного программирования	41
Лекция VI	43
Игры с выпуклой(вогнутой) функцией выигрыша	44
Лекция VII	49
Многошаговые игры с полной информацией	49
Лекция VIII	56
Исследование игровых моделей	56
Модель «нападение – защита»	56
Модель дуэли	59
Лекция IX	64
Неантагонистические игры. Ситуация равновесия в играх многих лиц	64

Игры двух лиц	64
Игры многих лиц	67
Лекция X	73
Биматричные игры	73
Метод поиска ситуаций равновесия	76
Доминирование в биматричных играх	82
Лекция XI	84
Иерархические игры	84
Равновесие по Штакельбергу	85
Минимизирующие стратегии	89
Лекция XII	92
Теория принятия решений. Многокритериальная или векторная оптимизация	94
Оптимальность по Парето и Слейтеру	96
Лекция XIII	100
Общая задача принятия решений	104
Лекция XIV	108
Сравнительная важность критериев	108
Математическая модель операции	113
Лекция XV	115
Оптимальные стратегии в операции	115
Оценки эффективности для чистых стратегий	117
Оценки эффективности для смешанных стратегий	118
Абсолютно оптимальная стратегия	118
Лекция XVI	122
Необходимое условие оптимальных(максиминных) стратегий	122
Алгоритм поиска максиминных стратегий	128
Лекция XVII	131
Некоторые задачи оптимального распределения ресурсов	131
Алгоритм для нахождения оптимального распределения. Непрерывный случай ..	133
Дискретный случай	135
Лекция XVIII	140
Задача поиска объекта	140

Лекция I

Введение

Основная идея нашего курса заключается в исследовании методов нахождения оптимальных решений различных задач при помощи математических моделей.

Часто нам будут встречаться игровые задачи с неопределенностями, связанными с наличием противника(антагониста), как, например, салонные или настольные игры. При этом противоборствующей стороной не обязательно будет человек – в ряде задач мы будем «сражаться» с природой.

Позднее мы рассмотрим неантагонистические игры, когда интересы участников не сталкиваются (например, на равновесные цены).

Дальше мы познакомимся с иерархическими играми: взаимодействие между начальником и подчиненным и др.

В заключение мы научимся решать задачи т.н. многокритериальной оптимизации, то есть те задачи, где нет возможности оптимизировать сразу все критерии; на последней лекции рассмотрим задачу распределения ресурсов.

Таков наш план на этот семестр.

Седловая точка и антагонистическая игра

$$x \in X, y \in Y \quad F(x, y) \quad X \times Y$$

Опр. 1. $(x, y) \in X \times Y$ – седловая точка F на $X \times Y$, если

$$F(x^0, y) \leq F(x^0, y^0) \leq F(x, y^0) \quad \forall x \in X, \forall y \in Y. \quad (1)$$

Пусть первый игрок выбирает $x \in X$, где X – множество стратегий, второй игрок – $y \in Y$, причем выбор происходит независимо друг от друга; $F(x, y)$ – функция выигрыша.

Такое описание задает антагонистическую игру $\Gamma = \langle X, Y, F(x, y) \rangle$.

Опр. 2. Седловая точка – пара стратегий, в которой игрокам не выгодно отклоняться от своих стратегий.

Опр. 3. Говорят, что антагонистическая игра Γ имеет решение, если $F(x, y)$ имеет седловую точку на $X \times Y$.

Решением является тройка $(x_0, y_0, V = F(x^0, y^0))$, (x^0, y^0) – седловая точка функции F . V называется значением или ценой игры, (x^0, y^0) – оптимальная стратегия.

Докажем лемму, показывающую корректность определения значения игры.

Лемма 1. Пусть функция F имеет две седловые точки $(x^0, y^0), (x^*, y^*)$.

Тогда $F(x^0, y^0) = F(x^*, y^*)$.

Доказательство: $F(x^*, y) \leq F(x^*, y^*) \leq F(x, y^*) \quad \forall x \in X, \forall y \in Y \quad (2)$

$$F(x^0, y^0) \stackrel{(1)}{\leq} F(x^0, y^*) \stackrel{(2)}{\leq} F(x^*, y^*) \stackrel{(2)}{\leq} F(x^*, y^0) \stackrel{(1)}{\leq} F(x^0, y^0)$$

На обоих концах неравенства стоят одинаковые члены, а значит справедливо и

равенство $F(x^0, y^0) = F(x^0, y^*) = F(x^*, y^*) = F(x^*, y^0) = F(x^0, y^0)$ и лемма доказана.

Опр. 4. Антагонистическая игра называется матричной, если множество стратегий игроков конечно: $\Gamma: X = \{1, \dots, m\}, Y = \{1, \dots, n\} \quad i \in X, j \in Y \quad F(i, j) = a_{ij}$ – элемент матрицы $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

Опр. 5. Пара (i^0, j^0) – седловая точка A , если $a_{ij^0} \leq a_{i^0 j^0} \leq a_{i^0 j}$.

Примеры.

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, (i^0, j^0) = (1, 1), (2, 1); V = 0$$

Пример иллюстрирует, что $F(x^0, y^0) = V \Rightarrow (x^0, y^0)$ – седловая точка.

2. «Орлянка».

$$A = \begin{pmatrix} \leftarrow & & \\ -1 & 1 & \\ \downarrow & 1 & -1 \\ & \rightarrow & \end{pmatrix}$$

Существование решения антагонистической игры

1-ый игрок:

$\Gamma: x \in X$

$W(x) = \inf_{y \in Y} F(x, y)$ – гарантированный выигрыш.

$\underline{V} = \sup_{x \in X} W(x) = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x, y)$ – наилучший гарантированный результат, называемый нижним значением игры.

Опр. 6. Стратегия $x^0 \in X$ называется максиминной, если $\inf_{y \in Y} F(x^0, y) = \underline{V}$.

2-ой игрок:

$\Gamma: y \in Y$

$M(y) = \sup_{x \in X} F(x, y)$

$$\bar{V} = \inf_{y \in Y} W(x) = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x, y)$$

Опр. 7. Стратегия $y^0 \in Y$ называется минимаксной, если $\sup_{x \in X} F(x, y^0) = \bar{V}$.

Лемма 2. Для любой антагонистической игры справедливо неравенство $\underline{V} \leq \bar{V}$.

Мнемоническое правило: «Лучше быть плохим среди хороших, чем хорошим среди плохих».

Доказательство:

$$\forall x \in X, \forall y \in Y \quad \inf_{y \in Y} F(x, y) \leq F(x, y) \leq \sup_{x \in X} F(x, y) \Rightarrow W(x) = \inf_{y \in Y} F(x, y) \leq \sup_{x \in X} F(x, y) \Rightarrow$$

$$\underline{V} \leq \sup_{x \in X} F(x, y) = M(y) \quad \forall y \in Y, \text{ значит, } \underline{V} \leq \bar{V} \text{ и лемма доказана.}$$

Теорема 1.1.

$$1) F \text{ на } X \times Y \text{ имеет седловую точку} \Leftrightarrow \max_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x, y) = \min_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x, y) \quad (\alpha)$$

{Предполагается, что максимумы и минимумы достигаются}

2) F - имеет седловую точку. Тогда

$$(x^0, y^0) \text{ - седловая точка} \Leftrightarrow \begin{cases} \inf_{y \in Y} F(x^0, y) = \underline{V} & y \in Y \\ \sup_{x \in X} F(x, y^0) = \bar{V} & x \in X \end{cases} \quad (\beta)$$

Доказательство:

$$(I) \quad (x^0, y^0) \text{ - седловая точка} \Rightarrow (\alpha), (\beta)$$

$$\bar{V} = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x, y) \leq \sup_{x \in X} F(x, y^0) \stackrel{(1)}{=} F(x^0, y^0) \stackrel{(1)}{=} \inf_{y \in Y} F(x^0, y) \leq \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x, y) = \underline{V} \stackrel{Л.2}{\leq} \bar{V}$$

Концы неравенства совпадают, и тогда оно обращается в равенство:

$$\bar{V} = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x, y) = \sup_{x \in X} F(x, y^0) \stackrel{(1)}{=} F(x^0, y^0) \stackrel{(1)}{=} \inf_{y \in Y} F(x^0, y) = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x, y) = \underline{V} \stackrel{Л.2}{=} \bar{V}$$

и, значит, выполнено условие (α) .

(II) $(\alpha)(x^0, y^0)(\beta) \Rightarrow (x^0, y^0)$ – седловая точка F.

$$F(x^0, y^0) \leq \sup_{x \in X} F(x, y^0) = \bar{V}^{(\beta)} = \underline{V}^{(\alpha)} = \inf_{y \in Y} F(x^0, y) \leq F(x^0, y^0).$$

Концы неравенства совпадают, и тогда оно обращается в равенство:

$$F(x^0, y^0) = \sup_{x \in X} F(x, y^0) = \bar{V}^{(\beta)} = \underline{V}^{(\alpha)} = \inf_{y \in Y} F(x^0, y) = F(x^0, y^0) \text{ и } (x^0, y^0) \text{ – седловая точка F.}$$

Метод нахождения всех седловых точек.

- 1) Найти все максиминные стратегии: $X^0 = \{x^0 \in X \mid (\beta)\}$
- 2) Найти все минимаксные стратегии: $Y^0 = \{y^0 \in Y \mid (\beta)\}$

Тогда $X^0 \times Y^0$ – прямоугольное(!) множество всех седловых точек.

Примеры.

1) $F(x, y) = xy, X = (-\infty, \infty), Y = (-\infty, \infty)$

$$(x^0, y^0) = (0, 0), x \cdot 0 \equiv 0 \cdot 0 \equiv 0 \cdot y$$

$$\forall x \neq 0 \inf_{y \in Y} xy = -\infty$$

2)

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 4 & -3 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{V} = \max_{1 \leq i \leq 4} \min_{1 \leq j \leq 4} a_{ij} = 2, i^0 = 2, 3 \text{ – строки, в которых это значение достигается}$$

Находим минимальные элементы в строках, а затем максимальные среди них.

$$\bar{V} = \min_{1 \leq j \leq 4} \max_{1 \leq i \leq 4} a_{ij} = 2, j^0 = 2, 4$$

Т.о. искомые стратегии: (2,2), (2,4), (3,2), (3,4)

3) $F(x, y) = 2x^2 - 3xy + y^2, X = [0, 1], Y = [0, 1]$

I. $\underline{V} = \max_{0 \leq x \leq 1} \min_{0 \leq y \leq 1} F(x, y)$

$$W(x) = \min_{y \in Y} F(x, y) = F(x, y(x)) \quad (\text{Рис. 1})$$

$$F'_y = 0 \Leftrightarrow -3x + 2y = 0 \quad \bar{y} = \frac{3}{2}x$$

$$y(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x, & 0 \leq x \leq \frac{2}{3} \\ 1, & \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$W(x) = F(x, y(x)) = \begin{cases} 2x^2 - \frac{9x \cdot x}{2} + \frac{9x^2}{4}, & 0 \leq x \leq \frac{2}{3} \\ 2x^2 - 3x + 1, & \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (\text{Рис. 2})$$

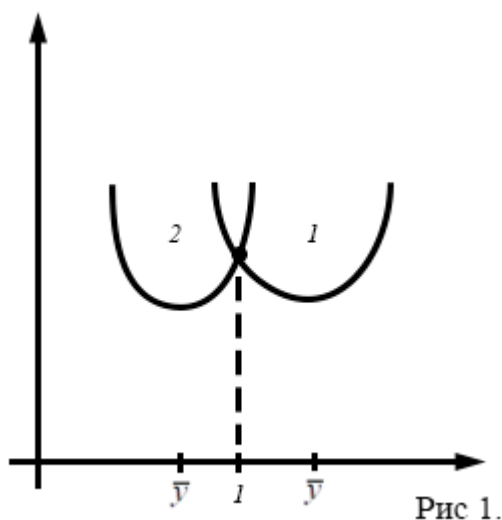


Рис 1.

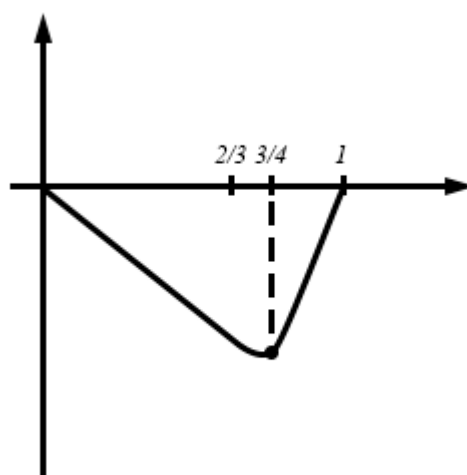


Рис 2.

$$\underline{V} = \max_{0 \leq x \leq 1} W(x) = 0, \quad x^0 = 0, 1$$

$$\text{II. } \bar{V} = \min_{0 \leq y \leq 1} \max_{0 \leq x \leq 1} F(x, y)$$

Здесь обходимся без дифференцирования, заметив, что функция принимает наибольшее значение на краях отрезка.

$$M(y) = \max_{0 \leq x \leq 1} F(x, y) = \max[F(0, y), F(1, y)]$$

$$F(0, y) = y^2, \quad F(1, y) = 2 - 3y + y^2 \quad (\text{Рис. 3})$$

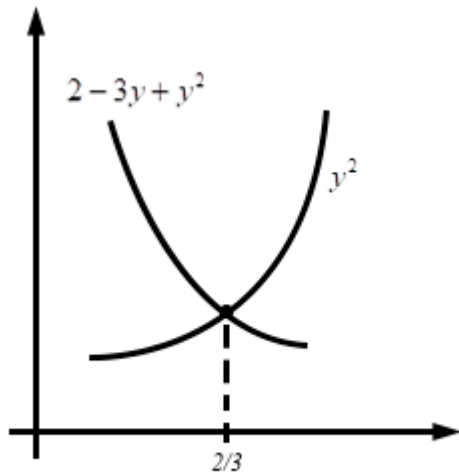


Рис 3.

Находим точку пересечения: $y = \frac{2}{3}$

$$\bar{V} = \min_{0 \leq y \leq 1} M(y) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

Лекция II

Условия существования максиминных и минимаксных стратегий при отсутствии седловых точек

Пусть Z – подмножество метрического пространства.

Опр. Множество Z – компакт, если $\forall \{z^k\} \in Z \exists \{z^{k_l}\} \rightarrow z^0 \in Z$

Пусть задана $h(x)$. Введем обозначение $\operatorname{Argmax}_{z \in Z} h(z) = \{z' \in Z \mid h(z') = \max_{z \in Z} h(z)\}$

(соответственно $\operatorname{Argmin}_{z \in Z} h(z) = \{z' \in Z \mid h(z') = \min_{z \in Z} h(z)\}$). Тогда

$$\forall x \in X \quad Y(x) = \operatorname{Argmin}_{y \in Y} f(x, y)$$

$$\forall y \in Y \quad X(y) = \operatorname{Argmax}_{x \in X} f(x, y)$$

Теорема 1.2.

Пусть $F(x, y) \in C(X \times Y)$, где X, Y – компакты метрических пространств.¹

Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $W(x) = \min_{y \in Y} F(x, y)$ – непрерывна на X ;
- 2) $\forall x \in X \quad Y(x) = \{y(x)\} \Rightarrow y(x)$ – непрерывна.

Доказательство:

$F(x, y) \in C(X \times Y) \Rightarrow$ она равномерно непрерывна:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x: \rho(x, x^0) < \delta \Rightarrow |F(x, y) - F(x^0, y)| < \varepsilon \quad \forall y \in Y$$

I. Покажем, что $|W(x) - W(x^0)| < \varepsilon$.

$$\forall y \in Y(x) \quad \forall y^0 \in Y(x^0)$$

$$W(x) - W(x^0) = F(x, y) - F(x^0, y^0) \leq F(x, y^0) - F(x^0, y^0) < \varepsilon.$$

II. Воспользуемся непрерывностью по Гейне:

$$x^k \rightarrow x^0 \in X$$

¹ $F(x, y) \in C(X \times Y) \Leftrightarrow F$ – непрерывна на $X \times Y$

Покажем, что $y(x^k) \rightarrow y(x^0)$

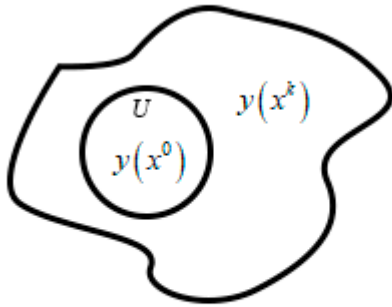


Рис 4.

Предположим, что $y(x^k) \not\rightarrow y(x^0)$. Это означает, что существует такая окрестность U точки $y(x^0)$, вне которой находится бесконечно много точек $y(x^k) \in Y \setminus U$ (Рис. 4).

Заметим, что $Y \setminus U$ – замкнутое (как дополнение к открытому множеству U), а замкнутое подмножество компакта – это компакт. Таким образом, $Y \setminus U$ – компакт.

Выделим $y(x^{k_l}) \rightarrow y' \in Y \setminus U$ $y' \neq y(x^0)$. Фактически, мы докажем, что $y' \in Y(x^0)$ (это противоречие ввиду условия $Y(x) = \{y(x)\}$).

$$F(x^{k_l}, y(x^{k_l})) \leq F(x^{k_l}, y) \quad \forall y \in Y$$

Переходя к пределу, получим $F(x', y') \leq F(x^0, y) \quad \forall y \in Y$.

Упр. Доказать теорему для $M(x) = \max_{y \in Y} F(x, y)$ (подсказка: $M(x) = -\min_{y \in Y} (-F(x, y))$)

Опр. Антагонистическая игра Γ называется непрерывной, если множества X, Y – параллелепипеды евклидовых пространств, а $F \in C(X \times Y)$.

Следствие 1(T1.2). В непрерывной игре всегда существуют максиминные стратегии первого игрока и минимаксные стратегии второго игрока.

Пример. $F(x, y) = (1 + y^2)(xy - 1)^2$, $X = [-1, 1]$, $Y = (-\infty, \infty)$

$$x = 0, y(0) = 0$$

$$x \neq 0, y(x) = \frac{1}{x}$$

$$W(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

Пусть Z – множество в конечномерном евклидовом пространстве.

Опр. Z – выпуклое множество, если $\forall z' \neq z'' \in Z \quad \forall \lambda \in (0,1)$ выполнено $\lambda z' + (1-\lambda)z'' \in Z$.

Опр. Z – выпуклое множество, на котором определена функция $h(z)$. Тогда $h(z)$ – выпуклая (строго выпуклая) функция, если $\forall z' \neq z'' \in Z \quad \forall \lambda \in (0,1)$ выполнено $h(\lambda z' + (1-\lambda)z'') \stackrel{(<)}{\leq} \lambda h(z') + (1-\lambda)h(z'')$.

Аналогично $h(z)$ – вогнутая (строго вогнутая) функция, если $h(\lambda z' + (1-\lambda)z'') \stackrel{(>)}{\geq} \lambda h(z') + (1-\lambda)h(z'')$.

Упр. Рассмотрим $h(z) = \sum_{i=1}^m z_i^2$. Доказать, что $h(z)$ – строго выпуклая.

Утв. $h(z) \in C(Z)$, $h(z)$ – строго выпуклая. Доказать, что минимум достигается в единственной точке. Подсказка: взять две минимизирующие точки, их полусумма также будет минимизирующей, получаем противоречие при помощи определения строго выпуклой функции.

Теорема 1.3 (о достаточных условиях существования седловой точки).

Пусть $F(x, y)$ – определена и непрерывна на $X \times Y$, $X \subset E^m$, $Y \subset E^n$

$$\begin{cases} \forall x \in X \quad F(x, y) \cup_y \\ \forall y \in Y \quad F(x, y) \cap_x \end{cases} \Rightarrow \exists \text{ седловая точка }^2$$

Доказательство:

I. Пусть $F(x, y)$ удовлетворяет всем условиям и строго выпукла, т.е.

² $\cup_y$ – функция выпукла по y , $\cap_x$ – функция вогнута по x

$W(r) = \min_{y \in Y} F(x, y) = F(x, y(x))$. Вследствие **Т1.2** $W(x), y(x)$ – непрерывны.

Возьмем максиминную стратегию $x^* : W(x^*) = \max_{x \in X} F(x, y)$. Докажем, что $(x^*, y(x^*))$ – седловая точка.

$$\forall x \in X, \forall t \in (0,1) \quad tx + (1-t)x^* \in X$$

Обозначим $\tilde{y} = y(tx + (1-t)x^*)$.

$$W(x^*) \geq W(tx + (1-t)x^*) = F(tx + (1-t)x^*, \tilde{y}) \geq tF(x, \tilde{y}) + (1-t)F(x^*, \tilde{y}) \geq$$

$$\geq tF(x, \tilde{y}) + (1-t)W(x^*) \Rightarrow tF(x, \tilde{y}) \leq tW(x^*) \xrightarrow{t \rightarrow 0} F(x, \tilde{y}) \leq W(x^*) \quad \forall x \in X \quad \forall t \in (0,1)$$

$$\tilde{y} = y(tx + (1-t)x^*) \xrightarrow{t \rightarrow 0} y(x^*)$$

В результате предельного перехода получаем:

$$F(x, y(x^*)) \leq W(x^*) = F(x^*, y(x^*)) \leq F(x^*, y), \quad \forall x \in X, \forall y \in Y, \text{ что фактически}$$

является определением седловой точки.

II. Рассмотрим теперь общий случай (без предположения о строгости выпуклости).

Используем прием введения возмущенной функции:

$$F_\varepsilon(x, y) = \underbrace{F(x, y)}_{\text{Выпукла по } y} + \underbrace{\varepsilon \sum_{i=1}^n y_i^2}_{\text{Строго выпукла по } y}, \quad \varepsilon > 0$$

Пусть $(x^\varepsilon, y^\varepsilon)$ – седловая точка $F_\varepsilon(x, y)$.

$$F_\varepsilon(x, y^\varepsilon) \leq F_\varepsilon(x^\varepsilon, y^\varepsilon) \leq F_\varepsilon(x^\varepsilon, y) \quad \forall x \in X, \forall y \in Y \quad (1)$$

Рассмотрим $\varepsilon_k \rightarrow 0+0$. Тогда $(x^{\varepsilon_k}, y^{\varepsilon_k}) \in X \times Y$.

Выделим сходящуюся подпоследовательность: $(x^{\varepsilon_{k_l}}, y^{\varepsilon_{k_l}}) \rightarrow (x^0, y^0)$. Имеем:

$$F_{\varepsilon_{k_l}}(x, y^\varepsilon) \leq F_{\varepsilon_{k_l}}(x^\varepsilon, y^\varepsilon) \leq F_{\varepsilon_{k_l}}(x^\varepsilon, y) \xrightarrow{\lim}$$

$$\Rightarrow F(x, y^0) \leq F(x^0, y^0) \leq F(x^0, y), \quad \forall x \in X, \forall y \in Y$$

Утв. 1. Пусть $F(x, y) \in C(X \times Y)$, где $X \subset E^m$ – выпуклый компакт,

Y – компакт некоторого метрического пространства, и пусть

$$\begin{cases} \forall x \in X \ Y(x) = \{y(x)\} \\ \forall y \in Y \ F(x, y) \cap_x \end{cases} \Rightarrow F(x, y) \text{ имеет седловую точку } (x^*, y(x^*))$$

Доказательство полностью повторяет доказательство теоремы 1.

Утв. 2. Пусть $F(x, y) \in C(X \times Y)$, где $Y \subset E^n$ – выпуклый компакт,

X – компакт некоторого метрического пространства, и пусть

$$\begin{cases} \forall y \in Y \ X(y) = \{x(y)\} \\ \forall x \in X \ F(x, y) \cup_y \end{cases} \Rightarrow F(x, y) \text{ имеет седловую точку } (x(y^*), y^*)$$

Доказательство полностью повторяет доказательство теоремы 1.

Примеры.

1) $F(x, y) = xy, \ X = [0, 1], \ Y = [0, 1]$

$$(x^0, y^0) = (0, 0)$$

$$x^0 = 0 \Rightarrow Y(0) = [0, 1] \Rightarrow y^* \in Y(0) \text{ и } (x^0, y^*) = (0, 1) - \text{не седловая точка}$$

2) $F(x, y) = -x^2 + y^3 + y^2x - 4y + 3, \ X = [0, 1], \ Y = [0, 1]$

$$F''_{xx} = -2 < 0 \Rightarrow \cap_x$$

$$F''_{yy} = 6y + 2x \geq 0 \Rightarrow \cup_y$$

$$M(y) = \max_{0 \leq x \leq 1} F(x, y) = F(x(y), y)$$

$$F'_x = 0 \Leftrightarrow 2x + y^2 = 0 \Rightarrow \bar{x} = \frac{y^2}{2} \in [0, 1]$$

$$M(y) = F(x(y), y) = \frac{y^4}{4} + y^3 - 4y + 3$$

$$M'(y) = y^3 + 3y^2 - 4 = 0 \quad (\text{Рис. 5})$$

$$y_1 = 1, \ y_{2,3} = -2$$

$$(x(y^*), y^*) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

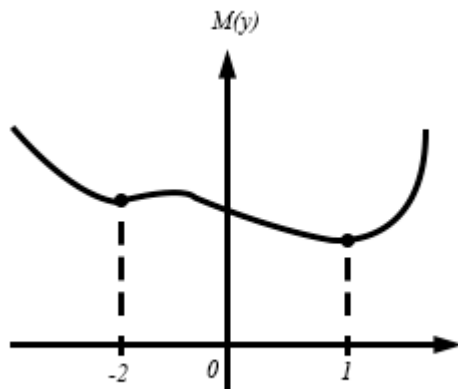


Рис 5.

Упр. Доказать, что $F(x, y): \cup_y, \cap_x$ имеет единственную седловую точку.

Лекция III

Смешанные стратегии

Вспомним пример матрицы, не имеющей решений:

$$A = \begin{pmatrix} & \leftarrow & \\ -1 & & 1 \uparrow \\ \downarrow & 1 & -1 \\ & \rightarrow & \end{pmatrix}$$

Пусть X – множество стратегий первого игрока.

Опр. Смешанной стратегией первого игрока φ на X называется вероятностное распределение на множестве X .

Применить смешанную стратегию означает выбрать $x \in X$ как реализацию случайной величины, имеющей распределение φ .

Примеры.

1. Пусть $X = \{1, \dots, m\}$, $p = (p_1, \dots, p_m) \in P = \{p \in E^m \mid \sum_{i=1}^m p_i = 1, p_i \geq 0 \ i=1, \dots, m\}$

вероятностный вектор. Применить смешанную стратегию – выбрать чистую стратегию i с вероятностью p_i .

$$p = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - \text{орлянка}$$

$$p = \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right) - \text{подбрасывания шестигранного кубика}$$

$$p = \left(\frac{7}{12}, \frac{5}{12}\right) - ?$$

2. Пусть $X = [a, b]$, $\varphi(x) = P(\xi \leq x)$ – функция распределения.

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1, & x \geq b \end{cases} \quad (\text{Рис. 6})$$

неубывает и непрерывна справа

η – равномерно распределенная на отрезке $[0,1]$ случайная величина

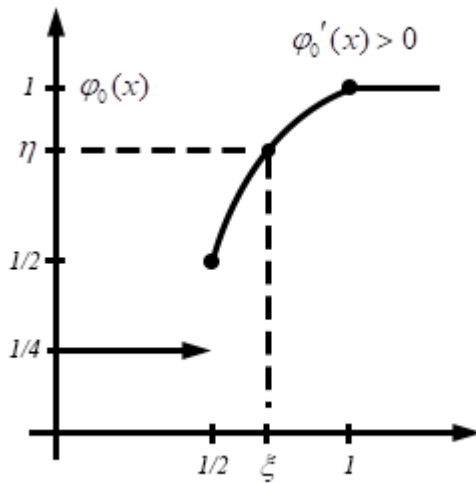


Рис 6.

$$\xi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \eta \leq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{4} < \eta \leq \frac{1}{2} \\ \varphi^{-1}(\eta), & \frac{1}{2} < \eta \leq 1 \end{cases} \quad - \text{обратная функция}$$

Случайная величина ξ будет иметь распределение $\varphi_0(x)$:

$$P(\xi \leq x) = P(\eta \leq \varphi_0(x)) = \varphi_0(x), \quad \varphi'_0(x) > 0.$$

Пусть $h(x)$ – непрерывна. Тогда справедлива формула:

$$\int_0^1 h(x) d\varphi_0(x) = \frac{1}{4}h(0) + \frac{1}{4}h\left(\frac{1}{2}\right) + \int_{\frac{1}{2}}^1 h(x) d\varphi'_0(x) dx$$

3. Пусть X – выпуклый компакт в конечномерном евклидовом пространстве.

Рассмотрим $x^0 \in X$. Определим функцию

$$I_{x^0}(x) = \begin{cases} 1, & x = x^0 \\ 0, & x \neq x^0 \end{cases}$$

$$I_{x^0}(B) = \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \notin B \end{cases}, \quad \text{где } B - \text{борелевское множество}$$

Организуем выпуклую комбинацию вырожденных распределений:

$$x^{(1)}, \dots, x^{(m)} \in X$$

$$\varphi = \sum_{i=1}^m p_i I_{x^{(i)}}, \quad p \in P$$

Формула осреднения.

Пусть $h(x)$ определена на X . Тогда

$$\int_X h(x) d\left[\sum_{i=1}^m p_i I_{x^{(i)}}\right] = \sum_{i=1}^m p_i h(x^{(i)})$$

Смешанное расширение антагонистических игр

Смешанное расширение матричной игры.

$$\Gamma: A = (a_{ij})_{m \times n}$$

$p \in P$ – смешанная стратегия первого игрока

$$q = (q_1, \dots, q_n) \in Q = \left\{ q \mid \sum_{j=1}^n q_j = 1, q_j \geq 0 \right\}$$

$$A(p, q) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i a_{ij} q_j$$

Тогда игра $\bar{\Gamma} = \langle P, Q, A(p, q) \rangle$ – смешанное расширение, $(p_0, q_0, V = A(p_0, q_0))$ – ее

решение, т. е. (p^0, q^0) образует седловую точку функции $A(p, q)$ на $P \times Q$.

$(p_0, q_0, V = A(p_0, q_0))$ называется решением игры Γ в смешанной стратегии, (p^0, q^0) – оптимальной смешанной стратегией.

Теорема 1.4 (основная теорема матричных игр).

Всякая матричная игра имеет решение в смешанной стратегии.

Доказательство: $A(p, q) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i a_{ij} q_j$ – линейна, а значит можно считать, что она вогнута по p и выпукла по q . Она определена на произведении выпуклых компактов.

Тогда по **Т1.3** $A(p, q)$ имеет седловую точку.

Использование смешанных стратегий

$$A(p, q^0) \leq A(p^0, q^0) \leq A(p^0, q) \quad \forall p \in P, \quad \forall q \in Q \quad (\text{опр. седловой точки})$$

1. Игра повторяется много раз:

$$A(p, q^0) \geq V$$

2. Однократное повторение игры: выигрыши a_{ij} преобразуются в т.н. полезности этих выигрышей.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} - \text{матрица полезности}$$

Как же найти полезность a ?

Рассмотрим лотерею, где выигрыш 10 будет с вероятностью a , а выигрыш 0 с вероятностью $(1-a)$. Средний выигрыш тогда равен $10a$. Первому игроку задается вопрос: при каком a он согласен купить этот лотерейный билет? Если игрок согласен купить билет при:

$$a = \frac{1}{2} - \text{нейтральное отношение;}$$

$$a > \frac{1}{2} - \text{осторожное отношение;}$$

$$a < \frac{1}{2} - \text{азарт. (Рис 7)}$$

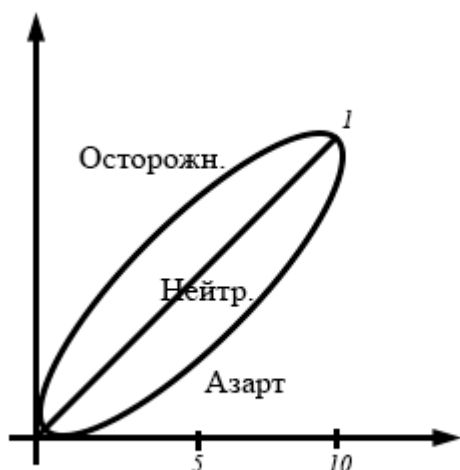


Рис 7.

3. Физические смеси.

Рассмотрим пример «игры против природы». Стратегия фермера – посадить одну из трех культур на участке. Стратегия природы – «выбор» года (нормального, дождливого, засушливого).

$H(h_{ij})_{3 \times 3}$ – функция урожайности.

$A(a_i h_{ij})$ – матрица выручки.

$P^0 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right)$ – смешанная стратегия.

Вместо того, чтобы «подбрасывать монетку», фермер может разделить участок (рис. 8) на три части.

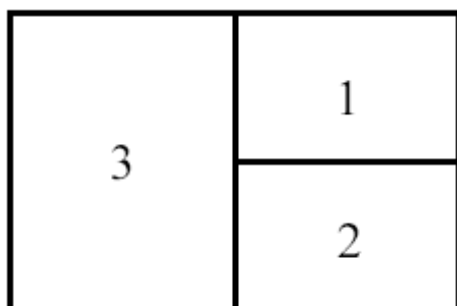


Рис 8.

Смешанное расширение непрерывных игр

Пусть $\Gamma = \langle X, Y, F(x, y) \rangle$, $X = [a, b]$, $Y = [c, d]$, $F(x, y) \in C(X \times Y)$ – непрерывная антагонистическая игра на прямоугольнике.

$\varphi \in \{\varphi\}$, $\psi \in \{\psi\}$ – функции распределения.

$$F(\varphi, \psi) = \int_a^b \int_c^d F(x, y) d\varphi(x) d\psi(y) \stackrel{\text{т. Фубини}}{=} \int_c^d \int_a^b F(x, y) d\varphi(x) d\psi(y) = \int_a^b \int_c^d F(x, y) d\psi(y) d\varphi(x)$$

$$F(x, \psi) = \int_c^d F(x, y) d\psi(y)$$

$$F(\varphi, y) = \int_a^b F(x, y) d\varphi(x)$$

$$\bar{\Gamma} = \langle \{\varphi\}, \{\psi\}, F(\varphi, \psi) \rangle$$

$$(\varphi^0, \psi^0, V = F(\varphi^0, \psi^0)),$$

(φ^0, ψ^0) – седловая точка $F(\varphi, \psi)$ на $\{\varphi\} \times \{\psi\}$

Фактически, нам нужно доказать, что игра $\bar{\Gamma}$ имеет решение.

Опр. Рассмотрим $\varphi^k \in \{\varphi\}$. Будем говорить, что $\varphi^k \xrightarrow{\text{сл.}} \varphi^0$ слабо, если

$$\forall h(x) \in C([a, b]) \quad \int_a^b h(x) d\varphi^k(x) \rightarrow \int_a^b h(x) d\varphi^0(x)$$

Теорема Хелли³ (без доказательства). Множество функций распределения $\{\varphi\}$

является слабым компактом, т.е. $\forall \varphi^k \in \{\varphi\} \quad \exists \varphi^{k_i} \xrightarrow{\text{сл.}} \varphi^0$.

Лемма 3. Пусть Γ – непрерывная игра на прямоугольнике. Тогда в этой игре существуют максиминные и минимаксные смешанные стратегии.

Доказательство: рассмотрим смешанное расширение $\bar{\Gamma}$ и для него выпишем нижнее и верхнее значение игры.

³ Эдуард Хелли (1884 – 1943) – австрийский математик, один из основоположников функционального анализа.

$$\underline{V} = \sup_{\varphi \in \{\varphi\}} \inf_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi, \psi)$$

$$\bar{V} = \inf_{\psi \in \{\psi\}} \sup_{\varphi \in \{\varphi\}} F(\varphi, \psi)$$

Фактически, лемма утверждает, что $\sup$ в первом выражении и $\inf$ во втором

достигаются на некоторых смешанных стратегиях φ^0 и ψ^0 соответственно.

Докажем существование максиминной смешанной стратегии. По определению верхней

границы, $\exists \varphi^k \in \{\varphi\}: \inf_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi^k, \psi) \rightarrow \underline{V}$. Используя *теорему Хелли*, получим, что

$\exists \varphi^{k_l} \xrightarrow{с.л.} \varphi^0$. Возьмем любую $\psi \in \{\psi\}$. Тогда

$$F(\varphi^{k_l}, \psi) = \int_a^b F(x, \psi) d\varphi^{k_l}(x) \rightarrow \int_a^b F(x, \psi) d\varphi^0(x) \text{ в силу непрерывности по } x F(x, \psi).$$

$$\forall \psi \in \{\psi\} F(\varphi^{k_l}, \psi) \geq \inf_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi^{k_l}, \psi) \xrightarrow{\lim} F(\varphi^0, \psi) \geq \underline{V} \quad \forall \psi \Rightarrow \inf_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi^0, \psi) \geq \underline{V}$$

Осталось заметить, что строгое неравенство здесь невозможно, поскольку $\underline{V}$ – верхняя

грань от нижней грани. Утверждение доказано для максиминных стратегий.

Доказательство для минимаксных стратегий полностью аналогично.

Лемма 4. Пусть функции $F(x, y)$, $F_1(x, y)$ определены на $X \times Y$, ограничены и для них выполнено условие близости:

$$|F(x, y) - F_1(x, y)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in X, \forall y \in Y \quad (A)$$

$$\text{Тогда } |\bar{V} - \bar{V}_1| \leq \varepsilon, \quad |\underline{V} - \underline{V}_1| \leq \varepsilon.$$

Доказательство: пусть функции $h(z)$, $h_1(z)$ определены на Z , ограничены и для них

$$\text{выполнено условие близости: } |h(z) - h_1(z)| \leq \varepsilon \quad \forall z \in Z$$

$$h_1(z) - \varepsilon \leq h(z) \leq h_1(z) + \varepsilon \quad \forall z \in Z$$

$$\inf_{z \in Z} h_1(z) - \varepsilon \leq \inf_{z \in Z} h(z) \leq \inf_{z \in Z} h_1(z) + \varepsilon \quad \forall z \in Z$$

$$\left| \inf_{z \in Z} h(z) - \inf_{z \in Z} h_1(z) \right| \leq \varepsilon \quad \forall z \in Z$$

То же верно и для верхних граней.

$$\forall x \in X \left| \overbrace{\inf_{y \in Y} F(x, y)}^{W(x)} - \overbrace{\inf_{y \in Y} F_1(x, y)}^{W_1(x)} \right| \leq \varepsilon, \text{ что следует из изложенного выше.}$$

$$\left| \overbrace{\sup_{x \in X} W(x)}^V - \overbrace{\sup_{x \in X} W_1(x)}^{V_1} \right| \leq \varepsilon \text{ и первое утверждение леммы доказано.}$$

Второе доказывается аналогично.

Теорема 1.5 (основная теорема непрерывных игр).

Всякая непрерывная игра Γ имеет решение в смешанной стратегии.

Доказательство: нам нужно установить, что $F(\varphi, \psi)$ имеет седловую точку на $\{\varphi\} \times \{\psi\}$.

Из **Тл.1** это равносильно доказательству того, что $\underline{V} = \bar{V}$,

$$\underline{V} = \max_{\varphi \in \{\varphi\}} \inf_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi, \psi), \quad \bar{V} = \min_{\psi \in \{\psi\}} \max_{\varphi \in \{\varphi\}} F(\varphi, \psi).$$

Рассмотрим $X = [a, b]$, $X = \bigcup_{i=1}^m X^i$ (рис. 9); $Y = [c, d]$, $Y = \bigcup_{j=1}^n Y^j$ (рис. 10).

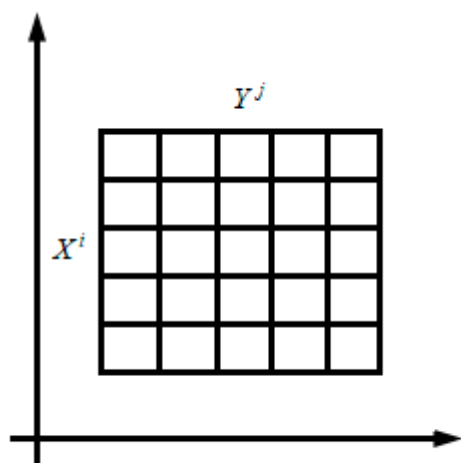
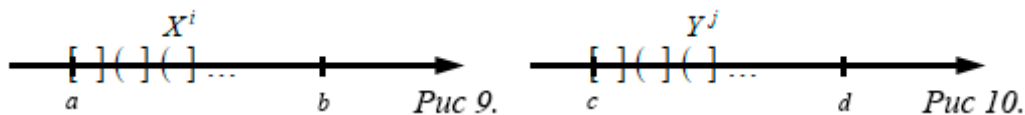


Рис 11.

$$(x^i, y^j) \in X^i \times Y^j \text{ (рис 11)}$$

Определим ступенчатую функцию:

$$F_1(x, y) = F(x^i, y^j), (x, y) \in X^i \times Y^j$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |F(x, y) - F_1(x, y)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in X, \forall y \in Y \quad (1)$$

Только что мы, к своему удивлению, аппроксимировали непрерывную игру матричной игрой.

$$A = (a_{ij} = F(x^i, y^j))_{m \times n}$$

$$\text{Определим отображение } \varphi \rightarrow p: p_i = \int_{X_i} d\varphi(x) \geq 0, \sum_{i=1}^m p_i = 1.$$

Таким образом можно определить $\{\varphi\} \xrightarrow{\text{на}} P^4$

$$\text{Аналогично для второго игрока: } \psi \rightarrow q: q_j = \int_{Y_j} d\psi(y) \geq 0, \sum_{j=1}^n q_j = 1$$

$$F_1(\varphi, \psi) = \int_a^b \int_c^d F_1(x, y) d\varphi(x) d\psi(y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n F(x^i, y^j) p_i q_j = A(p, q) \quad (2)$$

Покажем, наконец, что $F(\varphi, \psi)$ и $F_1(\varphi, \psi)$ – близкие функции.

$$\begin{aligned} |F(\varphi, \psi) - F_1(\varphi, \psi)| &= \left| \int_a^b \int_c^d (F(\varphi, \psi) - F_1(\varphi, \psi)) d\varphi(x) d\psi(y) \right| \leq \\ &\leq \int_a^b \int_c^d \overbrace{|F(\varphi, \psi) - F_1(\varphi, \psi)|}^{\leq \varepsilon \text{ в силу (1)}} d\varphi(x) d\psi(y) \leq \varepsilon \quad \forall \varphi \in \{\varphi\} \quad \forall \psi \in \{\psi\} \text{ и условие (A) выполнено.} \end{aligned}$$

Ура!

⁴ $\forall p \in P \quad \exists \varphi: \varphi \rightarrow p$

Лекция IV

Завершаем доказательство теоремы. Из **Л4** следует, что

$$\left| \max_{\varphi \in \{\varphi\}} \inf_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi, \psi) - \max_{\varphi \in \{\varphi\}} \min_{\psi \in \{\psi\}} \overbrace{F_1(\varphi, \psi)}^{\text{из (2) } = A(p, q)} \right| \leq \varepsilon$$

$$\left| \underbrace{\min_{\psi \in \{\psi\}} \sup_{\varphi \in \{\varphi\}} F(\varphi, \psi)}_{\underline{V}} - \underbrace{\min_{\psi \in \{\psi\}} \max_{\varphi \in \{\varphi\}} F_1(\varphi, \psi)}_{\max_{q \in Q} \min_{p \in P} A(p, q)} \right| \leq \varepsilon$$

Осталось заметить, что по основной теореме матричных игр $A(p, q)$ имеет седловую

точку, поэтому $\max_{\varphi \in \{\varphi\}} \min_{\psi \in \{\psi\}} F_1(\varphi, \psi) = \min_{\psi \in \{\psi\}} \max_{\varphi \in \{\varphi\}} F_1(\varphi, \psi) \Rightarrow |\underline{V} - \bar{V}| \leq 2\varepsilon \Rightarrow \underline{V} = \bar{V}$ и **T1.5**

полностью доказана.

Свойства решений в смешанных стратегиях

Теорема 1.6. Пусть Γ – непрерывная игра на прямоугольнике. Тогда

$$(\varphi^0, \psi^0, V) \text{ – решение в смешанных стратегиях } \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F(x, \psi^0) \leq V \leq F(\varphi^0, y) \quad \forall \varphi \in \{\varphi\} \quad \forall \psi \in \{\psi\}. \quad (*)$$

Доказательство:

$$(\varphi^0, \psi^0, V) \text{ – решение в смешанных стратегиях } \Rightarrow (*)$$

$$F(\varphi^0, \psi) \leq F(\varphi^0, \psi^0) = V \leq F(\varphi, \psi^0) \quad \forall \varphi \in \{\varphi\} \quad \forall \psi \in \{\psi\} \Rightarrow \{\varphi = x, \psi = y\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x, \psi^0) \leq V \leq F(\varphi^0, y) \quad \forall \varphi \in \{\varphi\} \quad \forall \psi \in \{\psi\}$$

$$(*) \Rightarrow (\varphi^0, \psi^0, V) \text{ – решение в смешанных стратегиях.}$$

Осредним неравенство (*) по φ и по ψ :

$$F(\varphi, \psi^0) \leq V \leq F(\varphi^0, \psi) \quad \forall \varphi \in \{\varphi\} \quad \forall \psi \in \{\psi\}$$

$$\varphi = \varphi^0, \quad \psi = \psi^0$$

$$F(\varphi^0, \psi^0) \leq V \leq F(\varphi^0, \psi^0) \Rightarrow F(\varphi^0, \psi^0) = V = F(\varphi^0, \psi^0) \text{ и достаточность также}$$

доказана.

Теорема 1.7. Пусть имеется игра с матрицей A . Тогда

(p^0, q^0, V) – решение в смешанных стратегиях $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow A(i, q^0) \leq V \leq A(p^0, j) \quad i = \overline{1, m} \quad j = \overline{1, n} \quad (*)$$

Доказательство аналогично **Т1.6**.

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} q_1^0 & j & q_n^0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} p_1^0 \\ i \\ p_n^0 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$A = (i, q^0) = \sum_{j=1}^m a_{ij} q_j^0$ – скалярное произведение i -ой строки на q^0 .

$A = (p^0, j) = \sum_{i=1}^n p_i^0 a_{ij}$ – скалярное произведение j -ого столбца на p^0 .

Пример.

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} c_1 & \dots & \dots & c_n \\ c_n & c_1 & \dots & c_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_2 & \dots & c_n & c_1 \end{pmatrix}, \quad p^0 = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right), \quad q^0 = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right), \quad V = \frac{\sum_{k=1}^n c_k}{n}$$

$$2) \quad F(x, y) = (x - y)^2 - |x - y|, \quad X = [0, 1], \quad Y = [0, 1]$$

$$\varphi^0(x) = x, \quad \psi^0(y) = y, \quad V = -\frac{1}{6} \text{ – показать самостоятельно.}$$

Теорема 1.8. Для непрерывной игры Γ справедливы следующие утверждения:

- 1) $\forall \varphi \in \{\varphi\} \quad \inf_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi, \psi) = \min_{y \in Y} F(\varphi, y);$
- 2) $\forall \psi \in \{\psi\} \quad \sup_{\varphi \in \{\varphi\}} F(\varphi, \psi) = \max_{x \in X} F(x, \psi).$

Доказательство:

$$\forall \varphi \in \{\varphi\} \quad \forall \psi \in \{\psi\} \quad F(\varphi, \psi) = \int_c^d F(\varphi, y) d\psi(y) \geq \int_c^d \min_{y \in Y} F(\varphi, y) d\psi(y) = \min_{y \in Y} F(\varphi, y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \inf_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi, \psi) \geq \min_{y \in Y} F(\varphi, y) \geq \{Y \subset \{\psi\}\} \geq \inf_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi, \psi) \Rightarrow \inf_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi, \psi) = \min_{y \in Y} F(\varphi, y)$$

Следствие. Для значения непрерывной игры Γ на прямоугольнике справедливо:

$$V = \inf_{\varphi \in \{\varphi\}} \min_{y \in Y} F(\varphi, y) = \min_{\psi \in \{\psi\}} \max_{x \in X} F(x, \psi)$$

Доказательство: мы знаем, что непрерывная игра Γ имеет решение в смешанных стратегиях, т.е. $F(\varphi, \psi)$ имеет седловую точку. Тогда, в силу **T1.1**:

$$V = \max_{\varphi \in \{\varphi\}} \inf_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi, \psi) = \min_{\psi \in \{\psi\}} \sup_{\varphi \in \{\varphi\}} F(\varphi, \psi).$$

Далее, используя **T1.8**, получим:

$$V = \max_{\varphi \in \{\varphi\}} \min_{y \in Y} F(\varphi, y) = \min_{\psi \in \{\psi\}} \max_{x \in X} F(x, \psi) \text{ и следствие доказано.}$$

Теорема 1.8*. Для матричной игры A справедливы следующие утверждения:

- 1) $\forall p \in P \min_{q \in Q} A(p, q) = \min_{1 \leq j \leq n} A(p, j);$
- 2) $\forall q \in Q \max_{p \in P} A(p, q) = \max_{1 \leq i \leq m} A(i, q).$

Доказательство теоремы аналогично **T1.8**.

Следствие. Для значения матричной игры A справедливо:

$$V = \max_{p \in P} \min_{1 \leq j \leq n} A(p, j) = \min_{q \in Q} \max_{1 \leq i \leq m} A(i, q)$$

Доказательство аналогично доказательству *следствия из T1.8*.

Свойство дополняющей нежёсткости

Опр. Будем говорить, что точка $x' \in Sp(\varphi)$ – спектру функции распределения, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists [a', b'] \subset [a, b] \ x' \in [a', b'] \ b' - a' < \varepsilon \underbrace{\varphi(b') - \varphi(a')}_{P([a', b'])} > 0 \quad (\text{рис. 12})$$

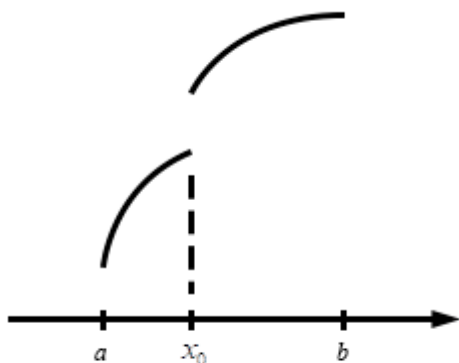


Рис 12.

Пример. Пусть в точке x_0 производная $\varphi'(x_0)$ существует и положительна. Тогда x_0 – точка спектра. (Рис. 13)

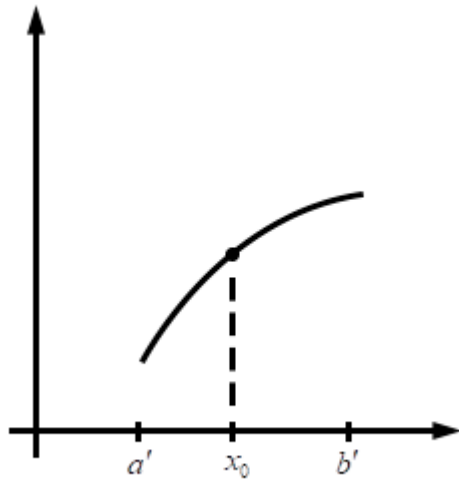


Рис 13.

Теорема 1.9 (свойство дополняющей нежесткости).

Пусть (φ^0, ψ^0, V) – решение в смешанных стратегиях непрерывной игры Γ на прямоугольнике. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $\forall x \in Sp(\varphi^0) \Rightarrow F(x, \psi^0) = V$;
- 2) $\forall y \in Sp(\psi^0) \Rightarrow F(\varphi^0, y) = V$.

Доказательство: из (*) следует, что $F(x, \psi^0) \leq V \leq F(\varphi^0, y)$. Теорема утверждает, что для точек из спектра это неравенство обращается в равенство. Предположим, что утверждение неверно, т.е. что $\exists x' \in Sp(\varphi^0): F(x', \psi^0) < V$.

В силу непрерывности по x функции $F(x, \psi^0)$,

$$\exists [a', b'] \quad x' \in [a', b'] \quad b' - a' < \varepsilon \quad F(x, \psi^0) \leq V' < V \quad \forall x \in [a', b'].$$

Из определения спектра следует, что можно выбрать отрезок $[a', b']$ таким образом, что $\varphi^0(b') - \varphi^0(a') > 0$. Придем к противоречию:

$$V = F(\varphi^0, \psi^0) = \int_a^b F(x, \psi^0) d\varphi^0(x) = \int_{a'}^{b'} \overbrace{F(x, \psi^0)}^{\leq V'} d\varphi^0(x) + \int_{X \setminus [a', b']} \overbrace{F(x, \psi^0)}^{\leq V} d\varphi^0(x) \leq$$

$$\leq V' \int_{a'}^{b'} \overbrace{d\varphi^0(x)}^{>0} + V \int_{X/[a',b']} d\varphi^0(x) < V \int_{a'}^{b'} d\varphi^0(x) + V \int_{X/[a',b']} d\varphi^0(x) = 1 \cdot V = V.$$

Следствие. Пусть (φ^0, ψ^0, V) – решение в смешанных стратегиях непрерывной игры Γ на прямоугольнике. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $F(x, \psi^0) < V \Rightarrow x \notin Sp(\varphi^0)$;
- 2) $F(\varphi^0, y) > V \Rightarrow y \notin Sp(\psi^0)$.

Теорема 1.10 (свойство дополняющей нежесткости для матричных игр).

Пусть (p^0, q^0, V) – решение матричной игры A . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $p_i^0 > 0 \Rightarrow A(i, q^0) = V$;
- 2) $q_i^0 > 0 \Rightarrow A(p^0, j) = V$.

Доказательство аналогично обоснованию **T1.9**.

Стоит заметить, что импликация $A(i, q^0) = V \Rightarrow p_i^0 > 0$, вообще говоря, не верна. Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} a & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots \\ a & \dots & a \end{pmatrix}, \quad V = a \text{ и все стратегии являются оптимальными.}$$

Такое экстравагантное название теоремы связано с тем, что если, например, в равносильности $A(i, q^0) \leq V \Leftrightarrow p_i^0 \geq 0$

$p_i^0 > 0$ ("нежестко") $\Rightarrow A(i, q^0) = V$ ("жестко") и наоборот,

$A(i, q^0) < V$ ("нежестко") $\Rightarrow p_i^0 = 0$ ("жестко").

Следствие. Пусть (p^0, q^0, V) – решение матричной игры A . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $A(i, q^0) < V \Rightarrow p_i^0 > 0$;
- 2) $A(p^0, j) > V \Rightarrow q_j^0 > 0$.

Примеры.

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad V^0 = 0, \quad p^0 = q^0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

$$2) \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & a_i & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}, \quad a_i > 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Если положить $0 < a_i < 1$, то игра имеет следующую интерпретацию: играют полицейские и преступники. Задача полицейского – поймать преступника.

Их стратегия – идти в n возможных мест. Если они «столкнутся» в i , то a_i – вероятность поймать преступника.

Отметим перво-наперво, что эта игра в чистых стратегиях решения не имеет:

$$\underline{V} = \max_{1 \leq i \leq n} \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij} = 0, \quad \text{но} \quad \bar{V} = \min_{1 \leq j \leq n} \max_{1 \leq i \leq n} a_{ij} = \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij} > 0.$$

Найдем решение в смешанных стратегиях. Предположим, что $p_i^0 > 0, q_j^0 > 0$. Тогда

$$A(i, q^0) = V, \quad i = \overline{1, n};$$

$$a_i q_i^0 = V, \quad i = \overline{1, n};$$

$$q_i^0 = \frac{V}{a_i}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Сложим последнее равенство по всем i :

$$1 = V \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \Rightarrow V = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}};$$

$$q_i^0 = \frac{1}{a_i} \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}}.$$

Для второго игрока поступаем аналогично.

$$q_j^0 > 0 \Rightarrow A(p^0, j) = V, \quad j = \overline{1, n};$$

$$a_j p_j^0 = V, \quad j = \overline{1, n};$$

$$p_j^0 = \frac{1}{a_j} \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}}.$$

Равенство $q_i^0 = p_j^0$ приводит нас к неочевидному выводу: полицейскому следует идти туда, где вероятность поймать преступника наименьшая. Такая себе реализация выражения «чтобы поймать преступника, нужно мыслить, как преступник».

Фактически, нами была решена задача $V = \max_{p \in P} \min_{1 \leq j \leq n} A(p, j) = \max_{p \in P} \min_{1 \leq j \leq n} a_j p_j = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}}.$

$$3) \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим $a \approx 1 \Rightarrow V \approx \frac{1}{2}$, т.е. первый игрок, будучи не вполне рассудителен, бросает монетку и выбирает любую из двух строчек.

Лекция V

Методы решения матричных игр

Доминирование строк и столбцов

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

Как было выяснено ранее, для существования седловой точки необходимо, чтобы

$$\max \min a_{ij} = \min \max a_{ij}.$$

Напомним условие (*) из **Т1.7**: $A(i, q^0) \leq V \leq A(p^0, j)$ $i = \overline{1, m}$ $j = \overline{1, n}$.

Пусть даны векторы $a = (a_1, \dots, a_l)$, $b = (b_1, \dots, b_l)$.

Опр. Будем говорить, что вектор a доминирует вектор b , если $a_i \geq b_i \quad \forall i = \overline{1, l}$.

Опр. Будем говорить, что вектор a строго доминирует вектор b , если $a_i > b_i \quad \forall i = \overline{1, l}$.

Пусть дан набор векторов $a^{(i)}$, $i = \overline{1, m}$ некоторого евклидова пространства и пусть

$p = (p_1, \dots, p_m)$ – вероятностный вектор, т.е. $\sum_{i=1}^m p_i = 1$, $p_i \geq 0$, $i = \overline{1, m}$.

Опр. Выпуклой комбинацией векторов $a^{(i)}$ с коэффициентами p_i называется $\sum_{i=1}^m p_i a^{(i)}$.

Теорема 1.11 (о доминировании строк).

Пусть некоторая строка матрицы A доминируется выпуклой комбинацией остальных строк этой матрицы. Тогда эта строка входит с нулевой вероятностью в некоторую оптимальную смешанную стратегию первого игрока, и ее можно вычеркнуть.

Если указанное доминирование строгое, то доминируемая строка входит с нулевой вероятностью в любую оптимальную смешанную стратегию первого игрока.

Доказательство:

пусть строка i_1 доминируется выпуклой комбинацией остальных строк. Тогда

$$a_{ij} \leq \sum_{i \neq i_1}^m p_i a_{ij}, \quad j = \overline{1, n}, \quad \sum_{i \neq i_1}^m p_i = 1, \quad p_i \geq 0, \quad i \neq i_1 \quad (1)$$

Вычеркнем в матрице A i_1 строку. Получим в результате матрицу $\hat{A}$ с аналогичной исходной матрице нумерацией строк. $(\hat{p}, q^0, V)$ – решение в смешанных стратегиях игры с матрицей $\hat{A}$. В частности, для этой тройки выполнено условие (*). Расширим вектор $\hat{p}$ следующим образом: $p^0 = (\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_{i_1-1}, 0, \hat{p}_{i_1+1}, \dots, \hat{p}_m)$. Утверждается, что (p^0, q^0, V) является решением игры с матрицей A . Проверим теперь справедливость условия (*) для (p^0, q^0, V) .

- 1) $A(p^0, j) = \hat{A}(\hat{p}, j) \stackrel{(*) \text{ для } \hat{A}}{\geq} V, j = \overline{1, n}$
- 2) $\forall i \neq i_1 \quad A(i, q^0) = \hat{A}(i, q^0) \stackrel{(*) \text{ для } \hat{A}}{\leq} V, i = \overline{1, m}$
- 3) $i = i_1 \quad A(i_1, q^0) = \sum_{j=1}^n a_{i_1 j} q_j^0 \leq \sum_{j=1}^n \sum_{i \neq i_1} (p_i q_{ij}) q_{j_0} = [p' = (p_i, i \neq i_1)] = \hat{A}(p', q^0) \leq V$

Докажем вторую часть теоремы. Приведенные выше неравенства в своем строгом варианте остаются справедливыми. Пусть p^* – оптимальная смешанная стратегия первого игрока. Тогда тройка (p^*, q^0, V) является решением в смешанных стратегиях игры с матрицей A . Используем *следствие Т1.10*: $A(i_1, q^0) < V \Rightarrow p_{i_1}^* = 0$.

Полезный *пример*:

$$A = \begin{pmatrix} a & \dots & a \\ \vdots & & \vdots \\ \text{⌘} & \dots & \text{⌘} \end{pmatrix} - \text{матрица, содержащая в каждой ячейке элемент } a. \text{ За счет нестрого}$$

доминирования, вычеркивая все строки, кроме первой, вы потеряете огромное количество оптимальных стратегий.

Теорема 1.12 (о доминировании столбцов).

Пусть некоторый столбец матрицы A доминирует выпуклую комбинацию остальных столбцов этой матрицы. Тогда этот столбец входит с нулевой вероятностью в некоторую оптимальную смешанную стратегию второго игрока, и его можно вычеркнуть.

Если указанное доминирование строгое, то доминирующий столбец

входит с нулевой вероятностью в любую оптимальную смешанную стратегию второго игрока.

Доказательство теоремы сходно с доказательством **T1.11**.

Примеры.

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Видно, что четвертый столбец больше третьего. Вычеркиваем его:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & \cancel{5} \\ 1 & 3 & 3 & \cancel{3} \\ 2 & 2 & 1 & \cancel{2} \\ 2 & 2 & 0 & \cancel{3} \end{pmatrix}$$

Аналогично третья строка больше четвертой строки. Вычеркиваем последнюю строку:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & \cancel{5} \\ 1 & 3 & 3 & \cancel{3} \\ 2 & 2 & 1 & \cancel{2} \\ \cancel{2} & \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{3} \end{pmatrix}$$

Здесь уже не осталось доминируемых строк и доминирующих столбцов, поэтому используем доминирование при помощи выпуклых комбинаций:

$$\frac{1}{2}(\text{первая строка}) + \frac{1}{2}(\text{вторая строка}) \geq (\text{третья строка}).$$

Тогда вычеркнем третью строку.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & \cancel{5} \\ 1 & 3 & 3 & \cancel{3} \\ \cancel{2} & \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ \cancel{2} & \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{3} \end{pmatrix}$$

Видно, что третий столбец доминирует второй.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Осталась матрица $\hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\hat{p} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\hat{q} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $V = 2$.

Дополняя векторы нулями, получаем искомое решение:

$$p^0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right), \quad q^0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right), \quad V = 2.$$

Упр. Пусть дана матрица $A = (a_{ij})_{m \times n}$, имеющая решение в чистых стратегиях.

Показать, что после вычеркивания доминируемых(-ющих) строк(столбцов), останется хотя бы одна седловая точка.

Графический метод решения матричной игры

Рассмотрим матрицу размеров $m \times 2$.

$$A = \begin{pmatrix} p_1 & a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ 1-p_1 & a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix}, \quad 0 \leq p_1 \leq 1$$

$$V = \max_{p \in P} \min_{1 \leq j \leq n} A(p, j) = \max_{0 \leq p_1 \leq 1} \min_{1 \leq j \leq n} [a_{1j} p_1 + a_{2j} (1 - p_1)],$$

$k_j = a_{1j} - a_{2j}$ – угловой коэффициент.

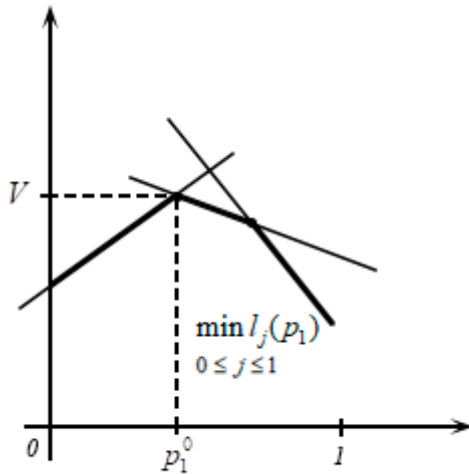


Рис 14.

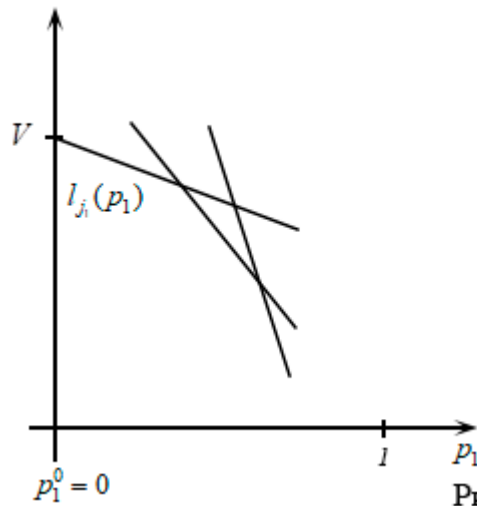


Рис 15.

a) $\exists j_1: k_{j_1} \geq 0, l_{j_1}(p_1^0) = V$ (Рис. 14)

$\exists j_2: k_{j_2} \leq 0, l_{j_2}(p_1^0) = V$

Будем искать оптимальную смешанную стратегию второго игрока:

$$q^0 = (0, \dots, 0, \underset{j_1}{q^*}, 0, \dots, 0, \underset{j_2}{1-q^*}, 0, \dots, 0),$$

$$k_{j_1} q^* + k_{j_2} (1 - q^*) = 0, \quad 0 \leq q^* \leq 1, \quad (2)$$

решение этого уравнения q^* всегда найдется. Это следует из противоположности знаков k_{j_1} и k_{j_2} .

Покажем, что q^0 – искомая смешанная стратегия второго игрока.

$$\forall 1 \leq p_1 \leq 1 \quad A(p, q^0) \equiv V$$

$$A(p, q^0) = q^* \overbrace{l_{j_1}(p_1)}^{k_{j_1}} + (1 - q^*) \overbrace{l_{j_2}(p_1)}^{k_{j_2}} = \text{const}, \quad l_{j_1}(p_1) = A(p, j_1)$$

$$l_{j_1}(p_1^0) = V = l_{j_2}(p_1^0) \Rightarrow \text{const} = V$$

b) $p_1^0 = 0$ (рис. 15)

$$\exists j_1: k_{j_1} \leq 0, l_{j_1}(0) = 0$$

$$A(p, j_1) = l_{j_1}(p_1) \leq V, \quad \forall p_1 \in [0, 1]$$

Получим, что $(2, j_1)$ – седловая точка.

c) $p_1^0 = 1$ (рис. 16)

Наличие седловой точки показывается аналогично.

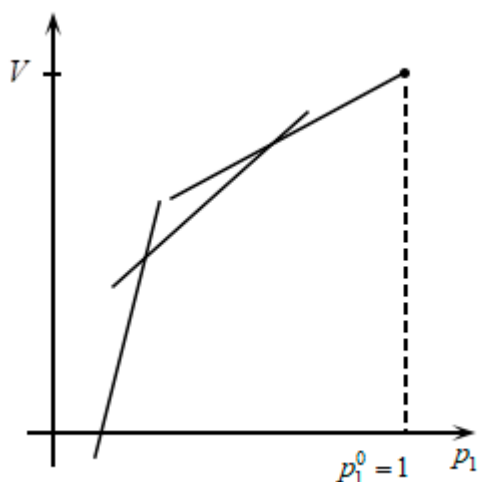


Рис 16.

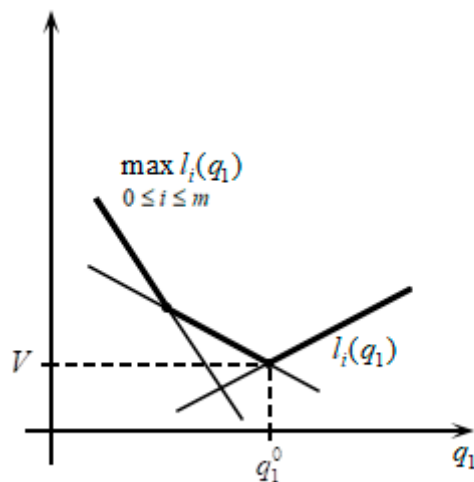


Рис 17.

Рассмотрим теперь матрицу размеров $m \times 2$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix}, \quad 0 \leq q_1 \leq 1,$$

$$k_{i_1} \geq 0, \quad l_{i_1}(q_1^0) = V \quad (\text{Рис. 17})$$

$$k_{i_2} \geq 0, \quad l_{i_2}(q_1^0) = V$$

$$V \stackrel{\text{Сл. Т1.10}}{=} \min_{q \in Q} \max_{1 \leq i \leq m} A(i, q) = \min_{0 \leq q_1 \leq 1} \max_{1 \leq i \leq m} \overbrace{[a_{i1}q_1 + a_{i2}(1 - q_1)]}^{l_i(q_1)}.$$

Аналогично строим оптимальную стратегию первого игрока.

$$p^0 = (0, \dots, 0, p^*, 0, \dots, 0, 1 - p^*, 0, \dots, 0),$$

$$k_{i_1} p^* + k_{i_2} (1 - p^*) = 0, \quad 0 \leq p^* \leq 1.$$

Задача.

$$\text{Решить матричную игру с } A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} p_1 \\ 1-p_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ (имеется в виду скалярное умножение столбца на столбец)}$$

$$l_1(p_1) = -p_1 + 2(1-p_1) = 2 - p_1 \quad (\text{рис. 18})$$

$$l_2(p_1) = -2p_1 + 4(1-p_1) = 4 - 6p_1$$

$$l_3(p_1) = 3p_1 + 1(1-p_1) = 1 + 2p_1$$

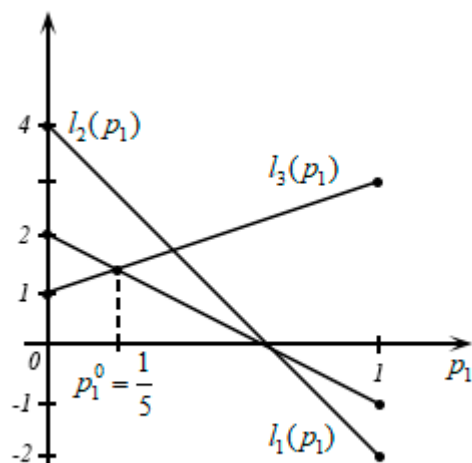


Рис 18.

$$l_1(p_1) = l_3(p_1) \Rightarrow 2 - 3p_1 = 1 + 2p_1 \Rightarrow p_1^0 = \frac{1}{5} \Rightarrow V = 1 + 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{7}{5}$$

$$p^0 = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5} \right), \quad q^0 = (q^*, 0, 1 - q^*), \quad k_1 = -3, \quad k_3 = 2$$

Составим уравнение (2):

$$-3q^* + 2(1 - q^*) = 0 \Rightarrow q^* = \frac{2}{5} \Rightarrow q^0 = \left(\frac{2}{5}, 0, \frac{3}{5} \right)$$

Сделаем проверку условия (*).

$$1) \quad A(p^0, j) \geq V = \frac{7}{5} \quad \forall j$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A(p^0, 1) = \frac{-1}{5} + \frac{8}{5} = \frac{7}{5}, \quad A(p^0, 2) = \frac{-2}{5} + \frac{16}{5} > \frac{7}{5}, \quad A(p^0, 3) = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5};$$

$$1) \quad A(i, q^0) \leq V = \frac{7}{5} \quad \forall i$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A(1, q^0) = \frac{-2}{5} + \frac{9}{5} = \frac{7}{5}, \quad A(2, q^0) = \frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{7}{5}.$$

В качестве **упражнения** транспонируйте матрицу и решите соответствующую матричную игру.

Упр. Пусть дана матрица $A_{2 \times 3}$. Выписать все оптимальные смешанные стратегии двух игроков (рис. 19 и 20).

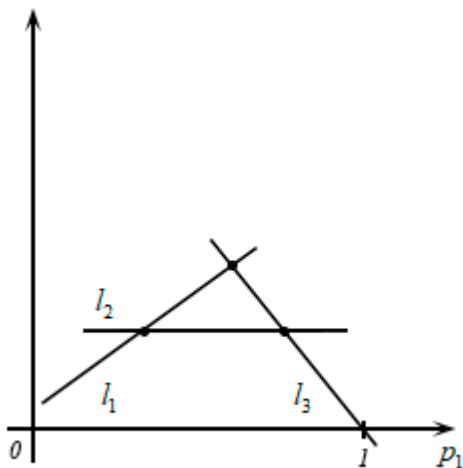


Рис 19.

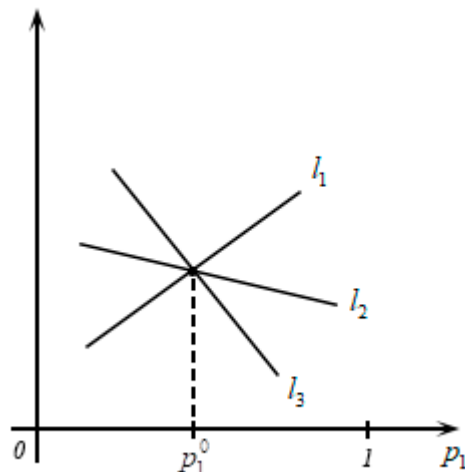


Рис 20.

Сведение решения матричной игры к паре двойственных задач линейного программирования.

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, \quad V > 0$$

Что, если в матрице A есть отрицательные элементы?

Предлагается ввести матрицу $B = (a_{ij} + C)$, где C – некоторая достаточно большая

константа. Тогда $V(B) = V(A) + C$ и если $(p^0, q^0, V(A))$ – решение игры с матрицей A , то $(p^0, q^0, V(A) + C)$ – решение игры с матрицей B .

Упр. Доказать, что это справедливо. Подсказка: использовать условие (*).

Рассмотрим прием ввода вспомогательной переменной и перехода от минимума к максимуму.

Идея: $1 = \min(1, 3, 5) = \max_{\substack{u \leq 1 \\ u \leq 3 \\ u \leq 5}} u$, т.е. переход от минимума к максимуму состоит в том,

чтобы ввести вспомогательную переменную u и наложить на нее соответствующие ограничения.

Применим это к максиминной стратегии.

$$V \stackrel{m.1.8'}{=} \max_{p \in P} \min_{1 \leq j \leq n} A(p, j) = \max_{p \in P} \max_{u \leq A(p, j), j=1, n} u$$

Лекция VI

Продолжаем рассматривать задачу сведения к максимуму.

$$V \stackrel{m.1.8'}{=} \max_{p \in P} \min_{1 \leq j \leq n} A(p, j) = \max_{p \in P} \max_{u \leq A(p, j), j=1, n} u = \max u \left\{ p, u : p \in P, A(p, j) = \sum_{i=1}^m p_i a_{ij} \geq u, j = \overline{1, n} \right\} =$$

5

$$= \left[u > 0, z : z_i = \frac{p_i}{u} \geq 0, i = \overline{1, m}, \sum_{i=1}^m z_i = \frac{\sum_{i=1}^m p_i}{u} = \frac{1}{u} \right] =$$

$$= \max_z \frac{1}{\sum_{i=1}^m z_i} \left\{ z : z_i \geq 0, i = \overline{1, m}; \sum_{i=1}^m z_i a_{ij} \geq 1, j = \overline{1, n} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\min_z \sum_{i=1}^m z_i} \left\{ z : z_i \geq 0, i = \overline{1, m}; \sum_{i=1}^m z_i a_{ij} \geq 1, j = \overline{1, n} \right\} \quad (I)$$

Таким образом, мы свели нашу задачу на максимум к задаче линейного программирования. Напомним, что она разрешима, так как существует максиминная стратегия исходной задачи.

Предположим, мы нашли оптимальное решение z^0 задачи (I). Тогда можно утверждать, что мы нашли решение игры и оптимальную смешанную стратегию первого игрока:

$$V = \frac{1}{\sum_{i=1}^m z_i^0}, \quad p^0 = V \cdot z^0$$

Теперь запишем минимаксную задачу.

$$V \stackrel{m.1.8'}{=} \min_{q \in Q} \max_{1 \leq i \leq m} A(i, q) = \dots = \frac{1}{\max_w \sum_{j=1}^n w_j} \left\{ w : w_j \geq 0, j = \overline{1, n}; \sum_{j=1}^n a_{ij} w_j \geq 1, i = \overline{1, m} \right\} \quad (II)$$

$$w^0 : q^0 = V \cdot w^0$$

⁵ В фигурных скобках приводятся соответствующие ограничения.

Отметим, что задачи (I) и (II) – взаимно двойственные.

С помощью **Т1.10** можно доказать свойство дополняющей нежёсткости для оптимальных решений этих двух задач:

$$z_i^0 > 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} w_j^0 = 1, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} w_j^0 < 1 \Rightarrow z_i^0 = 0$$

$$w_j^0 > 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^m z_i^0 a_{ij} = 1, \quad \sum_{i=1}^m z_i^0 a_{ij} < 1 \Rightarrow w_j^0 = 0$$

Упр. Попробуйте доказать это самостоятельно.

Игры с выпуклой(вогнутой) функцией выигрыша

Рассмотрим антагонистическую игру $\Gamma = \langle X, Y, F(x, y) \rangle$.

Опр. Будем говорить, что Γ – игра с выпуклой функцией выигрыша, если

$F(x, y)$ – непрерывна на $X \times Y$ и выполнено:

$$\forall x \in X \quad F(x, y) \cup_y,$$

$$\forall y \in Y \quad F(x, y) \cup_x.$$

Опр. Будем говорить, что Γ – игра с вогнутой функцией выигрыша, если

$F(x, y)$ – непрерывна на $X \times Y$ и выполнено:

$$\forall x \in X \quad F(x, y) \cap_y,$$

$$\forall y \in Y \quad F(x, y) \cap_x.$$

Пусть Z – выпуклое множество евклидова пространства.

Опр. $z^0 \in Z$ – крайняя точка, если $\nexists z' \neq z'' \in Z, \forall \lambda \in (0,1): z^0 = \lambda z' + (1-\lambda)z''$ (рис. 21)

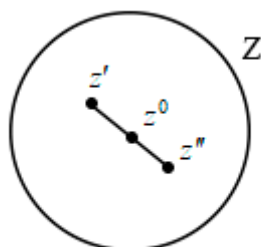


Рис 21.

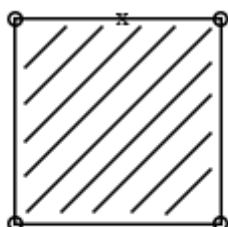


Рис 22.



Рис 23.

Как видно из рис. 22, точки в вершинах прямоугольника являются крайними, а, например, на ребрах – нет.

Другой пример – на рис. 23 все точки дуги – крайние.

Утв. Любой выпуклый компакт в евклидовом пространстве имеет крайнюю точку:
 $Z^{ext} \neq \emptyset$.

Доказательство: $Z \subset E^m$. Рассмотрим $h(z) = \sum_{i=1}^n z_i^2$ – строго выпуклую функцию (предполагается, что вы доказали это ранее).

Предположим противное: $\exists z' \neq z'' \in Z, \exists \lambda \in (0,1): z^0 = \lambda z' + (1-\lambda)z''$.

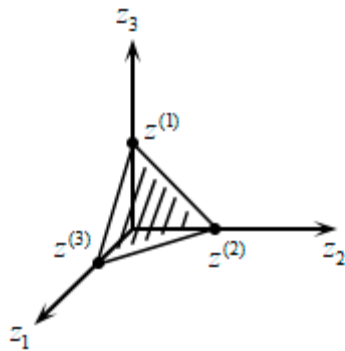
$$h(z_0) = h(\lambda z' + (1-\lambda)z'') < \lambda h(z') + (1-\lambda)h(z'') \leq \lambda h(z^0) + (1-\lambda)h(z^0) = h(z^0) -$$

противоречие. Тем самым утверждение доказано.

Пример. $Z = \left\{ z \in E^n \mid \sum_{i=1}^n z_i = A, z_i \geq 0, i = \overline{1, n} \right\}, A > 0$ (рис. 24)

$$z_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{A}, 0, \dots, 0), i = \overline{1, n}$$

Упр. Доказать, что точки z_i и только они являются крайними.



Множество Z для $n=3$ Рис 24.

Теорема 1.13 (Каратеодори⁶). Пусть $Z \subset E^m$. Тогда

$$\forall z \in Z \exists z^{(1)}, \dots, z^{(k)} \in Z^{ext}, \lambda_1 > 0, \dots, \lambda_k > 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \Rightarrow z = \sum_{i=1}^k \lambda_i z^{(i)}, k \leq m+1$$

⁶ Константин Каратеодори (1873 – 1950) – немецкий математик греческого происхождения, известен работами по теории функций, вариационному исчислению, теории конформных отображений, общей теории меры множеств.

(рис. 25)

Теорему приведем без доказательства.

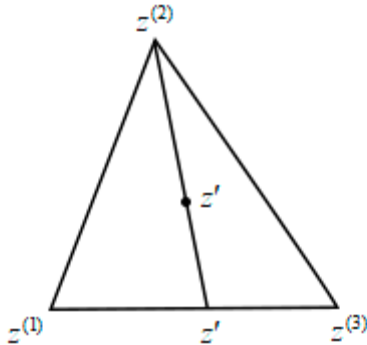


Рис 25.

Лемма 5. Пусть выпуклая функция $h(z)$ – определена и непрерывна на некотором компакте евклидова пространства. Утверждается, что $\max_{z \in Z} h(z) = \max_{z \in Z^{ext}} h(z)$.

Доказательство: $\exists z^0 : h(z^0) = \max_{z \in Z} h(z)$. Ввиду **T1.13**,

$$z^0 = \sum_{i=1}^k \lambda_i z^{(i)}, \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \quad \lambda_i > 0, \quad z^{(i)} \in Z^{ext}$$

$$h(z^0) = h\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i z^{(i)}\right) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i h(z^{(i)}) \leq \max_{1 \leq i \leq k} h(z^{(i)}) \leq h(z^0) \Rightarrow \max_{1 \leq i \leq k} h(z^{(i)}) = h(z^0)$$

и лемма доказана.

Пусть Γ – игра с выпуклой функцией $F(x, y)$ по каждой переменной (но не обязательно по совокупности переменных), X – выпуклый компакт, $X^{ext} = \{x^{(1)}, \dots, x^{(k)}\}$ –

конечное множество крайних точек. Также нам понадобится вектор

$$p = (p_1, \dots, p_k) \in P = \left\{ p \in E^k \mid \sum_{i=1}^k p_i = 1, p_i \geq 0, i = \overline{1, k} \right\}$$

Рассмотрим функцию $\Phi(p, y) = \sum_{i=1}^k p_i F(x^{(i)}, y) = \int_X F(x, y) d\varphi(x) = F(\varphi, y)$. (1)

Она определена на $P \times Y$ и является линейной по P и выпуклой по Y . Тогда по **T1.3** она

имеет седловую точку.

Теорема 1.14. Пусть Γ – игра с выпуклой функцией выигрыша $F(x, y)$,

$X^{ext} = \{x^{(1)}, \dots, x^{(k)}\}$ – конечное множество крайних точек. Утверждается, что эта игра имеет решение в смешанных стратегиях вида:

$$\left(\varphi^0 = \sum_{i=1}^k p_i^0 I_{x^{(i)}}, y^0, \bar{V} \right), \text{ где } (p^0, y^0) - \text{седловая точка функции } \Phi(p, y), y^0 -$$

минимаксная чистая стратегия, $V = \bar{V} = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} F(x, y)$.

Доказательство: покажем прежде справедливость равенства

$$\forall y \in Y \quad \max_{p \in P} \Phi(p, y) = \max_{x \in X} F(x, y) \stackrel{Л.5}{=} \max_{1 \leq i \leq k} F(x^{(i)}, y). \quad (2)$$

$$\max_{p \in P} \Phi(p, y) = \max_{p \in P} \sum_{i=1}^k p_i F(x^{(i)}, y) \stackrel{m.1.7}{=} \max_{1 \leq i \leq k} F(x^{(i)}, y) \stackrel{Л.5}{=} \max_{x \in X} F(x, y)$$

Пусть теперь (p^0, y^0) – седловая точка функции $\Phi(p, y)$. Тогда

$$\min_{y \in Y} \Phi(p^0, y) = \max_{p \in P} \min_{y \in Y} \Phi(p, y) \stackrel{m.1.1}{=} \min_{y \in Y} \max_{p \in P} \Phi(p, y) = \begin{cases} \max_{p \in P} \Phi(p, y^0) = \max_{x \in X} F(x, y^0) \\ \min_{y \in Y} \max_{p \in P} F(x, y) = \bar{V} \end{cases} \stackrel{(2)}{\Rightarrow}$$

$$\min_{y \in Y} \Phi(p^0, y) \stackrel{(1)}{=} \min_{y \in Y} F(\varphi^0, y) = \bar{V} = \max_{x \in X} F(x, y^0) \Rightarrow$$

$$F(\varphi^0, y) \leq \bar{V} \leq F(x, y^0) \quad \forall x \in X, \forall y \in Y$$

Это неравенство есть условие (*) из **Т1.6** для тройки $(\varphi^0, y^0, \bar{V})$. Теорема доказана.

Пусть Γ – игра с вогнутой функцией выигрыша $F(x, y)$, $Y^{ext} = \{y^{(1)}, \dots, y^{(k)}\}$ – конечное множество крайних точек.

Рассмотрим вероятностный вектор $q = (q_1, \dots, q_k) \in Q$ и функцию

$$\Phi_1(x, q) = \sum_{j=1}^k q_j F(x, y^{(j)}), \text{ являющуюся вогнутой по } x \text{ и выпуклой по } q.$$

Теорема 1.15. Эта игра имеет решение в смешанных стратегиях вида:

$\left(x^0, \psi^0 = \sum_{j=1}^k q_j^0 I_{y(j)}, y^0, \underline{V}\right)$, где (x^0, q^0) - седловая точка функции $\Phi(x, q)$, x^0 - максиминная чистая стратегия, $V = \bar{V} = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} F(x, y) = \min_{y \in Y} F(x^0, y)$.

Доказательство можно провести по аналогии с **Т1.14**.

Пример. $F(x, y) = x^2 - 3xy + y^2$, $X = [0, 1]$ $Y = [0, 1]$

$\left. \begin{matrix} F''_{xx}(x, y) = 2 > 0 \\ F''_{yy}(x, y) = 2 > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow F$ - строго выпукла по обеим переменным

$$\bar{V} = \min_{0 \leq y \leq 1} \max_{0 \leq x \leq 1} F(x, y) = \frac{4}{9}, y^0 = \frac{2}{3}$$

$$\underline{V} = 0 \neq \bar{V}$$

Найдем $\varphi^0 = p_1^0 I_0 + (1 - p_1^0) I_1$.

$$\Phi(p_1, y) = p_1 F(0, y) + (1 - p_1) F(1, y) = p_1 y^2 + (1 - p_1)(2 - 3y + y^2)$$

$\Phi(p_1^0, y)$ достигает минимума в точке $y = y^0$: $\Phi'(p_1^0, y) = 0$

$$\Phi'(p_1^0, y) = 2p_1^0 y + (1 - p_1^0)(-3 + 2y) = 0$$

$$y^0 = \frac{2}{3} \Rightarrow 2p_1^0 \cdot \frac{2}{3} + (1 - p_1^0)\left(-3 + 2 \cdot \frac{2}{3}\right) = 0 \Rightarrow \frac{4}{3} p_1^0 + (1 - p_1^0)\left(-\frac{5}{3}\right) = 0 \Rightarrow p_1^0 = \frac{5}{9}$$

$$\varphi^0 = \frac{5}{9} I_0 + \frac{4}{9} I_1.$$

Лекция VII

Многошаговые игры с полной информацией

До сего момента мы рассматривали модель антагонистической игры без динамики: противники не знали о шагах друг друга. В настоящей лекции речь пойдет об играх с полной информацией.

Пусть игра повторяется T шагов, $t = \overline{1, T}$ – номер каждого из шагов. На каждом шаге у игроков есть т.н. контролируемый фактор: x_t и y_t . Игроки выбирают альтернативы (значения) контролируемых факторов. Опишем процесс многошаговой игры с полной информацией.

Шаг 1. Первый игрок выбирает стратегию $x_1 \in U_1$, второй игрок, зная выбор оппонента, выбирает стратегию $y_1 \in V_1(x_1) = V_1(\square)$. Пусть игроки выбрали стратегии $x_1, \dots, x_{t-1}$ и $y_1, \dots, y_{t-1}$ соответственно.

Введем обозначение: $\overline{x_t} = (x_1, \dots, x_t)$, $\overline{y_t} = (y_1, \dots, y_t)$.

Шаг t . Первый игрок выбирает альтернативу x_t , при этом ему известны выборы $(\overline{x_{t-1}}, \overline{y_{t-1}})$, $x_t \in U_t(\overline{x_{t-1}}, \overline{y_{t-1}}) = U_t(\square)$. Второму игроку известны уже $(\overline{x_t}, \overline{y_{t-1}})$, он выбирает $y_t \in V_t(\overline{x_t}, \overline{y_{t-1}}) = V_t(\square)$.

Так игра продолжается, покуда не прошло T шагов, $(\overline{x_T}, \overline{y_T})$ называется партией игры.

Для любой партии определен выигрыш первого игрока: $F(\overline{x_T}, \overline{y_T})$.

Рассмотрим *пример*.

Игроки по очереди берут одну либо две спички. Условие таково: кто последний взял спичку, тот проиграл. Первый игрок, очевидно, проигрывает при $n = 3k + 1$, $k = 0, 1, \dots$ спичек и выигрывает при $n \neq 3k + 1$. Какова же стратегия первого игрока?

Предположим, $n = 23 = 3 \cdot 7 + 2$. Первый игрок берет в этом случае одну спичку, так как стремится свести число спичек к $n = 3k + 1$.

Упр. Имеются числа от 1 до 9, первый игрок выбирает одно из этих чисел. Второй – прибавляет к этому число любое из набора. Таким образом на каждом шаге игроки добавляют по числу из набора к сумме. Проигрывает тот, кто первым достиг или превысил 100. Какова здесь оптимальная стратегия?

Неформальное **определение стратегии** – выбор контролируемых факторов в зависимости от поступающей информации. Формализуем его.

Рассмотрим произвольный шаг t , функцию $x = x_t(\overline{x_{t-1}}, \overline{y_{t-1}})$, $x_t \in U$. Ее можно подготовить до игры и применять на каждом шаге непосредственной подстановкой.

Аналогично для второго игрока – $y = y_t(\overline{x_t}, \overline{y_{t-1}})$, $y_t \in V$.

Тогда **стратегией** первого игрока называется $x = (x_t, t = \overline{1, T}) \in X = \times \prod_{t=1}^T V_t$, $x_1 = x_1$.⁷

Стратегия второго игрока тогда $y = (y_t, t = \overline{1, T}) \in Y = \times \prod_{t=1}^T U_t$.

Нам осталось определить только функцию $F(x, y)$. Заметим, что паре стратегий первого игрока соответствует некоторая партия игры: $(x, y) \rightarrow (\overline{x}, \overline{y})$. Это соответствие устанавливается следующим образом:

1 шаг: $x_1 = x_1$, $y_1 = y_1(x_1)$;

2 шаг: $x_2 = x_2(x_1, y_1)$, $y_2 = y_2(x_2, y_1)$;

...

Тогда $F(x, y) \stackrel{def}{=} F(\overline{x_T}, \overline{y_T})$ и $\Gamma = \langle X, Y, F(x, y) \rangle$.

Рассмотрим частные случаи.

- 1) Γ' , в которой множества $U_t(\square)$ и $V_t(\square)$ – конечные;
- 2) Γ'' , $U_t(\square) \equiv U_t$, $V_t(\square) \equiv V_t$, где U_t , V_t – компакты метрического пространства.

⁷ $\times \prod$ означает прямое произведение.

$$\text{Функция } F(\overline{x}_T, \overline{y}_T) \in C \left[\left(\times \prod_{t=1}^T V_t \right) \times \left(\times \prod_{t=1}^T V_t \right) \right].$$

Нужно показать, что игры Γ' , Γ'' имеют решения.

$$\text{Определим стратегию } x^0 = (x_t^0, t=1, T), \quad y^0 = (y_t^0, t=1, T).$$

Начнем с самого последнего выбора – y_T^0 . Обозначим

$$y_T^0 = y_T^0(\overline{x}_T, \overline{y}_{T-1}): F(\overline{x}_T, \overline{y}_{T-1}, \overline{y}_T^0) = \min_{y_T \in V_T(\square)} F(\overline{x}_T, \overline{y}_{T-1}, y_T) = \overbrace{F(\overline{x}_T, \overline{y}_{T-1})}^{\text{функция Беллмана}}$$

$$x_T^0 = x_T^0(\overline{x}_{T-1}, \overline{y}_{T-1}): F(\overline{x}_{T-1}, x_T^0, \overline{y}_{T-1}) = \max_{x_T \in U_T(\square)} F(\overline{x}_T, x_T, \overline{y}_{T-1}) = F(\overline{x}_{T-1}, \overline{y}_{T-1})$$

Положим, что уже определены функции $y_T^0, x_T^0, \dots, y_{t+1}^0, x_{t+1}^0$, функция Беллмана при этом равна $F(\overline{x}_t, \overline{y}_t)$ и функции y_t^0, x_t^0 определяются по аналогии с вышеизложенными равенствами. Таким образом определены все функции вплоть до y_1^0, x_1^0 :

$$x_1^0: F(x_1^0) = \max_{x_1 \in U_1(\square)} F(x_1).$$

Следует отметить, что эти определения корректны для игр Γ' и Γ'' в том смысле, что все максимумы и минимумы достигаются: в игре Γ' оттого, что все множества конечны, а в игре Γ'' ввиду непрерывности цепочки функций минимума и максимума. Определим, наконец, значение игры.

$$V = \max_{x_1 \in U_1(\square)} F(x_1) = \max_{x_1 \in U_1(\square)} \min_{y_1 \in V_1(\square)} F(x_1, y_1) = \dots = \max_{x_1 \in U_1(\square)} \min_{y_1 \in V_1(\square)} \dots \max_{x_T \in U_T(\square)} \min_{y_T \in V_T(\square)} F(\overline{x}_T, \overline{y}_T)$$

Теорема 1.16 (Цермело⁸). Всякая многошаговая игра с полной информацией Γ' (или Γ'') имеет решение в чистых стратегиях: (x^0, y^0, V) .

Доказательство: нужно показать справедливость следующих утверждений:

$$1) \quad F(x^0, y) \geq V, \quad \forall y \in Y;$$

⁸ Эрнст Фридрих Фердинанд Цермело (1871 – 1953) – немецкий математик, внёсший значительный вклад в теорию множеств и создание аксиоматических оснований математики.

$$2) F(x, y^0) \leq V, \quad \forall x \in X.$$

Докажем первое неравенство.

$$\begin{aligned} \forall y \in Y \quad F(x^0, y) &= F(x^0, y_1, \dots, y_{T-1}, y_T) \geq \min_{y_T \in V_T(\square)} F(x^0, y_1, \dots, y_{T-1}, y_T) = F(x^0, y_1, \dots, y_{T-1}) = \\ &\stackrel{\text{def } x_T^0}{=} F(x^0, y) = \max_{x_T \in U_T(\square)} F(x_1^0, \dots, x_{T-1}^0, x_T, y_1, \dots, y_{T-1}) = \min_{y_T \in V_T(\square)} F(x_1^0, \dots, x_{T-1}^0, y_1, \dots, y_{T-1}) \geq \\ &\geq \dots F(x_1^0, y_1) \geq \min_{y_1 \in V_1(\square)} F(x_1^0, y_1) = F(x_1^0) = \max_{x_1 \in U_1(\square)} F(x_1) = V \text{ и первое утверждение} \end{aligned}$$

доказано.

Второе доказывается подобным образом.

Примеры.

1. Шахматы.

Белые – первый игрок, черные – второй. Ход $x_t \in U_t(\overline{x_{t-1}}, \overline{y_{t-1}})$ делают белые,
 $y_t \in V_t(\overline{x_t}, \overline{y_{t-1}})$ – черные.

$$F(\overline{x_T}, \overline{y_T}) = \begin{cases} 1, & \text{выиграли белые;} \\ 0, & \text{выиграли черные;} \\ 1/2, & \text{ничья.} \end{cases}$$

Т.о. шахматы – игра с полной информацией вида Γ' и для нее справедлива **теорема**

Цермело.

2. Матричная игра.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 7 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Разобьем строки и столбцы на следующие множества:

$$M_1 = \{1, 2\}, M_2 = \{3, 4\}, M_\alpha \quad \alpha = 1, 2^9$$

⁹ $\{1, 2\}$ – строки(столбцы) 1 и 2

$$N_1 = \{1, 2\}, N_2 = \{3, 4\}, N_\beta \quad \beta = 1, 2$$

Рассмотрим двухшаговую игру.

1) Первый игрок выбирает α , т.е. то множество M_α , откуда он будет выбирать строки. Второй игрок выбирает β , зная о выборе α .

2) Первый игрок выбирает $i \in M_\alpha$ – номер строки, второй игрок выбирает $j \in N_\beta$ – номер столбца, зная о выборе i .

Наша задача – выписать решения игры и все оптимальные стратегии игроков.

Построим дерево этой игры (рис. 26). Выпишем последовательно функции Беллмана:

$$F(\alpha, \beta, i, j) = a_{ij}$$

$$F(\alpha, \beta, i) = \max_{j \in N_\beta} F(\alpha, \beta, i, j)$$

$$F(\alpha, \beta) = \max_{i \in M_\alpha} F(\alpha, \beta, i)$$

$$F(\alpha) = \min_{\beta=1,2} F(\alpha, \beta)$$

$$V = \max_{\alpha=1,2} F(\alpha)$$

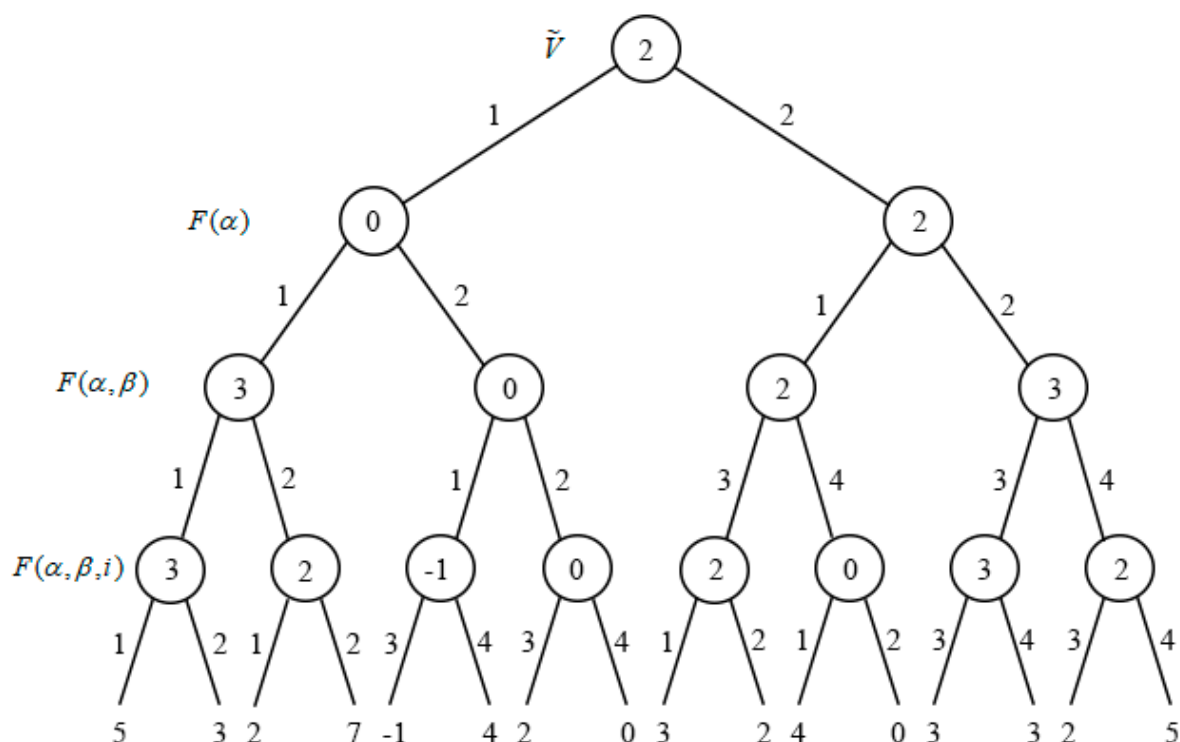


Рис 26.

Найдем оптимальные стратегии: $(\alpha^0, i^0(\alpha, \beta)), (\beta^0(\alpha), j^0(\alpha, \beta, i))$.

$$F(\alpha^0) = V = \max_{\alpha=1,2} F(\alpha) = 2$$

Найдем $i^0(\alpha, \beta)$, при этом можно облегчить себе жизнь, рассмотрев $i^0(2, \beta)$, т.к. мы знаем, что первый игрок выберет $\alpha = 2$.

$$i^0(2, 1) = 3, \quad i^0(2, 2) = 3 \text{ или } 4$$

$$\beta^0(1) = 2, \quad \beta^0(2) = 1 \quad (*)$$

Найдем теперь $j^0(\alpha, \beta, i)$. Здесь также можно миновать годы монотонных вычислений, используя (*).

$$j^0(1, 2, i) \Rightarrow j^0(1, 2, 1) = 3, \quad j^0(1, 2, 2) = 3 \text{ или } 4$$

$$j^0(2, 1, i) \Rightarrow j^0(2, 1, 3) = 2, \quad j^0(2, 1, 4) = 2$$

Упр. Попробуйте решить с той же матрицей следующую задачу:

- 1) Второй игрок выбирает β , первый игрок выбирает α , зная о выборе β .
- 2) Второй игрок выбирает $j \in N_\beta$, второй игрок выбирает $i \in M_\alpha$, зная о выборе j .

Задача. Пусть задана функция $F(x, y) = (x - y)^2$, $X = [0, 1]$, $Y = [0, 1]$.

Рассмотрим одношаговую игру с полной информацией: первый игрок выбирает x , второй – y , зная об x ; выигрыш определяется по функции F . (Подсказка: максимин).

Другой вариант этой задачи – когда игроки меняются местами. (Подсказка: минимакс).

Лекция VIII

Исследование игровых моделей

Модель «нападение – защита»

Пусть имеется n пунктов с номерами $i = \overline{1, n}$ возможного «прорыва» средств нападения сквозь защитные пункты. Нападение имеет $A > 0$ ресурсов. Стратегией нападения

является $x = (x_1, \dots, x_n) \in X = \left\{ x \mid \sum_{i=1}^n x_i = A, x_i \geq 0, i = \overline{1, n} \right\}$.

Защита, в свою очередь, имеет в распоряжении $B > 0$ средств, и распределяет средства защиты в соответствии с вектором $y = (y_1, \dots, y_n) \in Y = \left\{ y \mid \sum_{i=1}^n y_i = B, y_i \geq 0, i = \overline{1, n} \right\}$.

Рассмотрим, как измеряется эффективность средств защиты на i -ом пункте. Пусть μ_i – количество средств нападения, которое может уничтожить одно средство защиты.

Пусть на пункт i выделяется x_i средств нападения и y_i средств защиты. Тогда возможны два случая:

1. $x_i \geq \mu_i y_i \Rightarrow x_i - \mu_i y_i \geq 0$ – количество сил, которое прорывается
2. $x_i < \mu_i y_i \Rightarrow$ не прорывается никого

Объединяя, получаем, что на i -ом пункте прорывается $\max[x_i - \mu_i y_i, 0]$.

$F(x, y) = \sum_{i=1}^n \max[x_i - \mu_i y_i, 0]$ – функция выигрыша.

В результате мы ввели антагонистическую игру $\Gamma = \langle X, Y, F(x, y) \rangle$ в нормальной форме¹⁰.

Заметим, что $F(x, y)$ – выпуклая функция как сумма линейных (а значит, выпуклых) функций.

Без потери общности будем считать, что $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n > 0$.

¹⁰ Игроки выбирают стратегии независимо друг от друга.

Исследуем эту модель.

а) Покажем, что $\underline{V} = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} F(x, y) = \max [A - \mu_n B, 0]$ и $x^{(0)} = x^{(n)} = (0, \dots, 0, A)$, т.е. все силы направляются на слабейший n -ый пункт.

$$\forall x \in X \quad i_0: \sum_{i=1}^{i_0-1} \frac{x_i}{\mu_i} \leq B < \sum_{i=1}^{i_0} \frac{x_i}{\mu_i} \quad 11$$

$$y(x): y_i(x) = \begin{cases} \frac{x_i}{\mu_i}, & i = \overline{1, i_0-1} \\ B - \sum_{i=1}^{i_0-1} \frac{x_i}{\mu_i}, & i = i_0 \\ 0, & i > i_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} W(x) = \min_{y \in Y} F(x, y) &\leq F(x, y(x)) = x_{i_0} - \mu_{i_0} \left(B - \sum_{i=1}^{i_0-1} \frac{x_i}{\mu_i} \right) + \sum_{i=i_0+1}^n x_i = \sum_{i=i_0}^n x_i + \sum_{i=1}^{i_0-1} \frac{\mu_{i_0}}{\mu_i} x_i - \mu_{i_0} B \leq \\ &\leq \sum_{i=i_0}^n x_i + \sum_{i=1}^{i_0-1} x_i - \mu_{i_0} B = A - \mu_{i_0} B \leq A - \mu_n B \leq \max [A - \mu_n B, 0] = \min_{y \in Y} \max [A - \mu_n y_n, 0] = \\ &= \min_{y \in Y} F(x^{(n)}, y) = W(x^{(n)}) \end{aligned}$$

Таким образом, мы показали, что $W(x) \leq W(x^{(n)}) \quad \forall x \in X$ и

$$\min_{y \in Y} \max [A - \mu_n y_n, 0] = \max [A - \mu_n B, 0]$$

$$\text{б) Покажем, что } \bar{V} = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} F(x, y) = \max \left[A - \frac{B}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k}}, 0 \right] \text{ и}$$

$$y^0: y_i^0 = \frac{B}{\mu_i \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k}}, \quad \forall i = \overline{1, n}, \text{ т.е. чем меньше сил защита направляет на пункт, тем}$$

меньше он защищен.

¹¹ Если $i_0 = 1$, то первое неравенство отсутствует, если же $i_0 = n + 1$, то отсутствует второе неравенство.

Если $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n > 0$, то $y_i^0 = \frac{B}{n}$, $\forall i = \overline{1, n}$.

Отметим, что у множества X , крайними точками являются стратегии

$$x^{(i)} = (0, \dots, 0, A, 0, \dots, 0), \quad i = \overline{1, n}.$$

$$\forall y \in Y \quad \max_{x \in X} F(x, y) \stackrel{1.5}{=} \max_{1 \leq i \leq n} F(x^{(i)}, y) \quad (1)$$

$$\bar{V} = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} F(x, y) \stackrel{(1)}{=} \min_{y \in Y} \max_{1 \leq i \leq n} F(x^{(i)}, y) = \min_{y \in Y} \max_{1 \leq i \leq n} [A - \mu_i y_i] =$$

$$= \min_{y \in Y} \max [A - \min_{1 \leq i \leq n} \mu_i y_i, 0] = \max [A - \max_{y \in Y} \min_{1 \leq i \leq n} \mu_i y_i, 0] = \max [A - B \max_{y \in Y} \min_{1 \leq i \leq n} \mu_i \frac{y_i}{B}, 0] =$$

$$= \left[p: p_i = \frac{y_i}{B} \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{B} = 1 \right] = \max [A - B \max_{p \in P} \min_{1 \leq i \leq n} \mu_i p_i, 0] =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{см. лекцию IV, пример 2} \\ \text{про полицейского и} \\ \text{преступника} \end{array} \right] = \max \left[A - \frac{B}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k}}, 0 \right]$$

$$\text{и } y^0 = B p^0, \quad y_i^0 = \frac{B}{\mu_i \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k}}, \quad \forall i = \overline{1, n}$$

Рассмотрим случай: $B \geq A \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k}$, т.е. защита имеет достаточно много сил.

$$\bar{V} = \max \left[\overbrace{A - \frac{B}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k}}}^{\leq 0 \text{ в силу нер-ва}}, 0 \right] = 0 \geq \underline{V} \geq 0 \Rightarrow \bar{V} = \underline{V} = 0$$

Теперь рассмотрим случай, когда $B < A \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k}$. Покажем, что для него седловой точки в чистых стратегиях не существует.

$$\bar{V} = \max \left[\overbrace{A - \frac{B}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k}}}^{>0}, 0 \right] = A - \frac{B}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k}} > A - \frac{B}{\frac{1}{\mu_n}} = A - \mu_n B > 0 \Rightarrow \bar{V} > \max [A - \mu_n B] = \underline{V}$$

Ввиду этого обстоятельства, исследуем игру в смешанных стратегиях.

с) $F(x, y)$ – выпуклая и, в соответствии с **Т1.14**, мы можем заключить, что

$$V = \bar{V}, \quad y^0: \quad y_i^0 = \frac{B}{\mu_i \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k}}, \quad \forall i = \overline{1, n}.$$

Докажем, что оптимальной смешанной стратегией является:

$$\varphi^0 = \sum_{i=1}^n p_i^0 I_{x_i}, \quad p_i^0 = \frac{1}{\mu_i \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k}}, \quad i = \overline{1, n}^{12}$$

По сути, нам нужно доказать, что $F(\varphi^0, y) \geq \bar{V}, \quad \forall y \in Y$.

Приведем очевидное вспомогательное неравенство. Для некоторых $a_i, \quad i = \overline{1, n}$

$$\text{справедливо: } \sum_{i=1}^n \max[a_i, 0] \geq \max \left[\sum_{i=1}^n a_i, 0 \right].$$

$$\begin{aligned} F(\varphi^0, y) &= \sum_{i=1}^n p_i^0 F(x^{(i)}, y) = \sum_{i=1}^n p_i^0 \max[A - \mu_i y_i, 0] = \sum_{i=1}^n \max \left[\overbrace{A p_i^0 - \mu_i p_i^0 y_i}^{a_i}, 0 \right] \geq \\ &\geq \max \left[\sum_{i=1}^n (A p_i^0 - \mu_i p_i^0 y_i), 0 \right] = \max \left[A - \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k}}, 0 \right] = \max \left[A - \frac{B}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k}}, 0 \right] = \bar{V} \end{aligned}$$

Модель дуэли

Пусть расстояние между игроками равно d_0 , каждый дуэлянт имеет в своем

¹² Чем менее защищен пункт, тем по нему предпочтительнее нанести удар.

распоряжении по одному выстрелу. По команде они начинают сближаться и могут произвести выстрел в любой момент времени. В нашей модели нет барьера между игроками, который бы ограничивал расстояние. Дуэлянты характеризуются функциями меткости $p_i(d)$, $i = 1, 2$.¹³ Будем считать, что эти функции обладают следующими свойствами: они непрерывны, определены на $[0, d_0]$ и убывают, причем

$$p_i(0) = 1, i = 1, 2 \quad (\text{рис. 27})$$

$$p_i(d_0) = 0, i = 1, 2$$

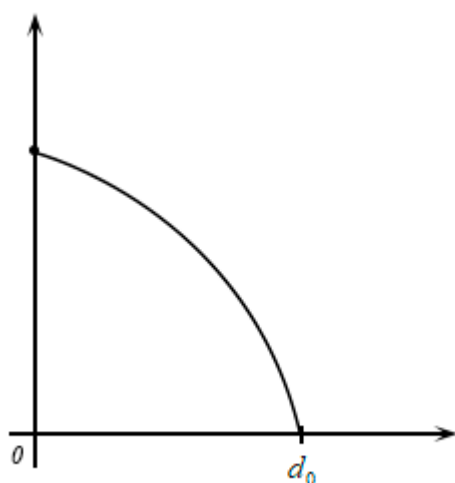


Рис 27.

Сформулируем модель шумной дуэли.¹⁴

Стратегия первого дуэлянта $x \in X = [0, d_0]$ – расстояние, с которого он намеревается сделать выстрел. Аналогично для второго игрока $y \in Y = [0, d_0]$.

Выпишем функцию выигрыша для первого дуэлянта. Будем считать главной его целью – поразить противника¹⁵ с наибольшей вероятностью.

$$F(x, y) = \begin{cases} p_1(x), & x \geq y \\ 1 - p_2(y), & x < y \end{cases} \quad (\text{рис. 28})$$

(Отметим, что дуэльная ситуация встречается и в экономике. Пусть объявлен некий

¹³ По сути, вероятность того, что игрок поразит противника, стреляя с расстояния d .

¹⁴ Дуэлянты слышат выстрелы друг друга.

¹⁵ А не, например, сохранить жизнь.

проект, за который борются две фирмы. Его нужно подать не позднее времени T .
Логично, что чем меньше потрачено времени на выполнение проекта, тем больше вероятность, что его отклонят. Поэтому эта игра с выбором момента времени.)

$$d^* : p_1(d) = 1 - p_2(d)$$

Установим, что решение игры – $(d^*, d^*, V = p_1(d^*))$.

$$\underline{V} = \max_{0 \leq x \leq d_0} \inf_{0 \leq y \leq d_0} F(x, y) = \max_{0 \leq x \leq d_0} \min [p_1(x), 1 - p_2(x)] = p_1(d^*)$$

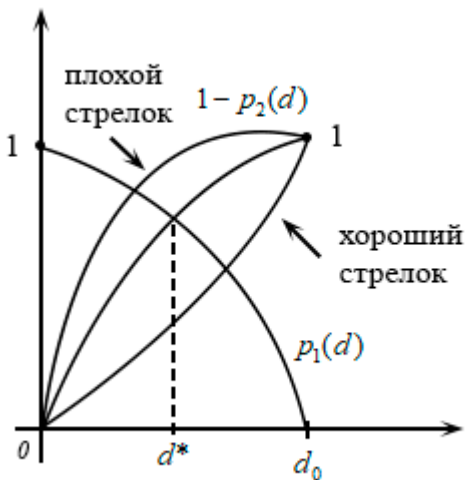


Рис 28.

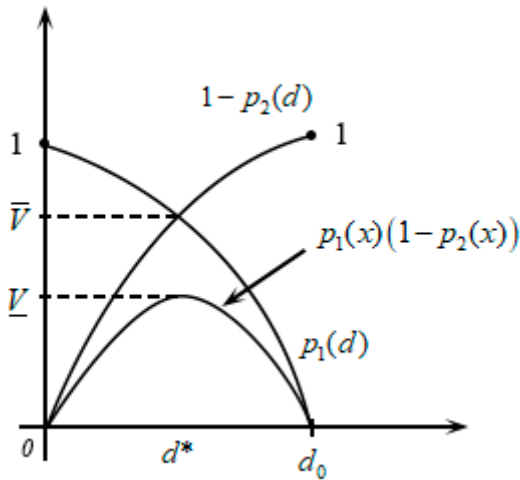


Рис 29.

$$\bar{V} = \min_{0 \leq y \leq d_0} \sup_{0 \leq x \leq d_0} F(x, y) = \min_{0 \leq y \leq d_0} \max [p_1(y), 1 - p_2(y)] = p_1(d^*)$$

Мы получили, что $\bar{V} = \underline{V} = p_1(d^*)$.

В случае, если $p_1(d) \equiv p_2(d)$,

$$d^* : p_1(d) = 1 - p_2(d) \Rightarrow p_1(d) = 1 - p_1(d) \Rightarrow p_1(d) = \frac{1}{2}$$

Теперь рассмотрим модель бесшумной дуэли.

$$x \in X = [0, d_0], y \in Y = [0, d_0]$$

$$F(x, y) = \begin{cases} p_1(x), & x \geq y \\ (1 - p_2(y)) p_1(x), & x < y \end{cases} \quad (\text{рис. 29})$$

Покажем, что в этой модели нет седловой точки в чистых стратегиях.

$$\underline{V} = \max_{0 \leq x \leq d_0} \inf_{0 \leq y \leq d_0} F(x, y) = \max_{0 \leq x \leq d_0} [p_1(x)(1 - p_2(x))]$$

$$\bar{V} = p_1(d^*)$$

Справедливость этих равенств почти очевидна. Проверьте самостоятельно.

Итак, мы получили, что $\underline{V} < \bar{V}$.

Рассмотрим *пример*.

$$d_0 = 1, \quad p_1(d) = p_2(d) = 1 - d$$

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - x, & x \geq y \\ y(1 - x), & x < y \end{cases} \quad (\text{рис. 30})$$

Подробное исследование можно посмотреть в зеленой книге(нет, не в фильме ☺), здесь же приведем результаты.

$$V = \sqrt{2} - 1 < \frac{1}{2}$$

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \left(\frac{1}{(x-1)^2} + 1 \right), & 0 \leq x \leq 2 - \sqrt{2} \\ 1, & 2 - \sqrt{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\psi_0(y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \left(\frac{1}{(y-1)^2} - 1 \right), & 0 \leq y \leq 2 - \sqrt{2} \\ 1, & 2 - \sqrt{2} \leq y \leq 1 \end{cases}$$

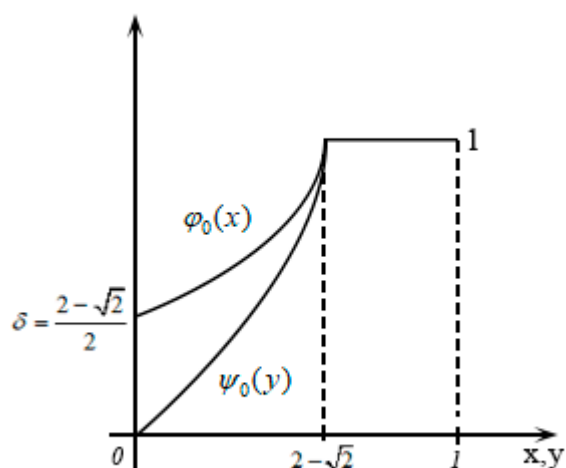


Рис 30.

Упр. Проверьте выполнение неравенств (*):

$$F(\varphi^0, y) \geq V = \sqrt{2} - 1 \geq F(x, \psi^0), \quad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y.$$

Лекция IX

Неантагонистические игры. Ситуация равновесия в играх многих лиц

Игры двух лиц

Пусть $x \in X$ – стратегия первого игрока, $y \in Y$ – второго, и пусть задана ситуация $(x, y) \in X \times Y$. Функция выигрыша первого игрока – $F(x, y)$, второго игрока – $G(x, y)$ и оба игрока стремятся максимизировать эти функции.

Тогда общая игра двух лиц в нормальной форме – $\Gamma = \langle X, Y, F(x, y), G(x, y) \rangle$.

Отметим, что в частном случае $G(x, y) = -F(x, y)$ Γ является антагонистической игрой.

Опр. (x^0, y^0) называется ситуацией равновесия или равновесием по Нэшу¹⁶, если

$$\begin{cases} F(x, y^0) \leq F(x^0, y^0), \quad \forall x \in X \\ G(x^0, y) \leq G(x^0, y^0), \quad \forall y \in Y \end{cases}$$

В частности, если $G \equiv -F$, ситуация равновесия – это седловая точка. Проверьте это самостоятельно.

Опр. Γ называется биматричной, если для $i \in X = \{1, \dots, m\}$, $j \in Y = \{1, \dots, n\}$

справедливо представление:

$$F(i, j) = a_{ij}, \quad A = (a_{ij})_{m \times n}$$

$$G(i, j) = b_{ij}, \quad B = (b_{ij})_{m \times n}$$

Опр. (x^0, y^0) – ситуация равновесия в биматричной игре, если

$$a_{ij^0} \leq a_{i^0 j^0}, \quad \forall i = \overline{1, m}$$

$$b_{i^0 j} \leq b_{i^0 j^0}, \quad \forall j = \overline{1, n}$$

¹⁶ Джон Форбс Нэш-младший (1928 – 2015) – американский математик, работавший в области теории игр и дифференциальной геометрии.

Судите сами: в матрице A элемент a_{ij} является максимальным в j_0 -ом столбце, а в матрице B элемент b_{ij} является максимальным в i_0 -ой строке.

$$A = \begin{matrix} & j_0 \\ i_0 & \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{ij} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad B = \begin{matrix} & j_0 \\ i_0 & \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & b_{ij} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Для того, чтобы продемонстрировать недостатки ситуации равновесия, рассмотрим **примеры**.

1. «Семейный спор».

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{жена}}, \quad B = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{муж}}$$

Спорят они о том, куда идти: на футбол(Ф) или в театр(Т).

$$A = \begin{matrix} & \text{Ф} & \text{Т} \\ \text{Ф} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \text{Т} & \end{matrix}, \quad B = \begin{matrix} & \text{Ф} & \text{Т} \\ \text{Ф} & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{Т} & \end{matrix}$$

Жена получает одну единицу удовольствия от похода на футбол, муж – две. С театром, напротив, жена – две, муж – одну. От похода порознь они, очевидно, удовольствия не получают.

Ситуаций равновесия здесь две: (ФФ) и (ТТ), и в каждой из них игроки получают разные выигрыши. В таких случаях говорят, что для реализации ситуации равновесия необходимо заблаговременно договориться. Игры с приведенным сценарием поведения называют бескоалиционными.

2. «Дилемма заключенного».

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}}_{1 \text{ заключенный}}, \quad B = \underbrace{\begin{pmatrix} -5 & -10 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}_{2 \text{ заключенный}}$$

У каждого из арестантов есть две возможности: сознаться(Д) или нет(Н).

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} Д & Н \end{matrix} \\ \begin{matrix} Д \\ Н \end{matrix} & \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad B = \begin{matrix} & \begin{matrix} Д & Н \end{matrix} \\ \begin{matrix} Д \\ Н \end{matrix} & \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Тогда имеются три возможности:

либо один сознается, а второй нет, тогда первый получит 10 лет, а другой – 1 год тюрьмы;

либо они оба не признаются и получают по 2 года тюрьмы;

либо оба признаются и получают по 5 лет тюрьмы.

Единственная ситуация равновесия здесь – (ДД). Она обладает следующим недостатком: существует ситуация (НН), где заключенные оказываются в более выигрышном положении. В связи с этим можно ввести понятие оптимальности по Парето¹⁷.

Опр. (x^*, y^*) называется оптимальной по Парето, если

$$\nexists (x, y): \begin{cases} F(x, y) \geq F(x^*, y^*) \\ G(x, y) \geq G(x^*, y^*) \end{cases} \text{ и хотя бы одно из этих неравенств строгое.}$$

Упр. Покажите, что в антагонистической игре любая ситуация является оптимальной по Парето. Подсказка: выигрыши на плоскости будут находиться на прямой $G + F = 0$.

$$3. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

(1,1) – единственная ситуация равновесия. Ее недостаток состоит в том, что ее равновесные стратегии не являются максиминными.

$$W(1) = \min_{1 \leq j \leq 3} a_{1j} = 0;$$

$$W(2) = \min_{1 \leq j \leq 3} a_{2j} = 2 \quad \text{– максиминная стратегия.}$$

Аналогично можно показать, что для второго игрока равновесная стратегия максиминной не является.

¹⁷ Вильфредо Федерико Дамасо Парето (1848 – 1923) – итальянский инженер, экономист и социолог. Один из основоположников теории элит.

Таким образом, фактически, один игрок может безопасно для себя отклониться так, чтобы навредить второму.

Игры многих лиц

Пусть $I = \{1, \dots, s\}$, $s \geq 2$, – множество игроков, $x_k \in X_k$ – стратегия k -го игрока. При этом возникает набор стратегий $x = (x_1, \dots, x_s) \in X = \times_{k=1}^s X_k$, называемый ситуацией¹⁸.

Функция выигрыша k -го игрока – $F_k(x)$, все игроки стремятся максимизировать свой выигрыш.

Тогда игра многих лиц в нормальной форме – $\Gamma = \langle X_k, Y_k, F_k(x), k \in I \rangle$.

Введем полезное обозначение. Пусть x – некоторая ситуация, у k -го игрока есть стратегия $y_k \in X_k$. Тогда $x \parallel y_k = (x_1, \dots, x_{k-1}, y_k, x_{k+1}, \dots, x_s)$.

Опр. Ситуация $x^0 \in X$ называется ситуацией равновесия или равновесием по Нэшу, если $\max_{x_k \in X_k} F_k(x^0 \parallel x_k) = F_k(x^0)$, $k = \overline{1, s}$.

Зафиксируем стратегию x_l , $l \neq k$ и определим множество наилучших ответов

$$X_k(x_l, l \neq k) = \operatorname{Argmax}_{x_k \in X_k} F_k(x).$$

Опр. Ситуация $x^0 \in X$ называется ситуацией равновесия или равновесием по Нэшу, если $x^0 : x_k \in X_k(x_l, l \neq k)$, $k = \overline{1, s}$.

Теорема 2.1. Пусть X_k – выпуклые компакты евклидовых пространств¹⁹ и пусть

$$F_k(x) \in C\left(X = \times_{k=1}^s X_k\right). \text{ Тогда}$$

$$\forall F_k \cap_{x_k} \forall x_l, l \neq k \Rightarrow \text{в игре } \Gamma \text{ существует ситуация равновесия.}$$

Доказательство:

¹⁸ В англоязычной традиции – point(точка).

¹⁹ Вообще говоря, разных размеров.

I. Пусть функции $F_k(x)$ удовлетворяют всем условиям и строго вогнуты по x_k т.е.

$X_k(x_l, l \neq k) = \{f_k(x_l, l \neq k)\} \in X_k$, где f_k – функция наилучшего ответа. Построим

отображение $x \rightarrow f(x) = (f_k(x_l, l \neq k), k = \overline{1, s})$. Оно непрерывно вследствие

непрерывности каждой функции $f_k(x_l, l \neq k)$ по **T1.2**. Таким образом, мы построили

непрерывное отображение $f: X \rightarrow X$.

Приведем без доказательства вспомогательную топологическую теорему.

Теорема Брауэра²⁰ (о неподвижной точке).

Пусть задано непрерывное отображение $f: X \rightarrow X$, где X – выпуклый компакт евклидова пространства. Тогда $\exists x^0 \in X: f(x^0) = x^0$.

Применим ее: $f(x^0) = x^0 \Rightarrow f_k(x_l^0, l \neq k) = x_k^0, k = \overline{1, s}$.

Тем самым мы получили, что x_k^0 является наилучшим ответом на нулевые стратегии остальных игроков и x^0 – седловая точка.

II. Рассмотрим теперь общий случай (без предположения о строгости выпуклости).

Введем, как и прежде, возмущенную функцию:

$$F_k^\varepsilon(x) = \underbrace{\overbrace{F_k(x)}^{\text{Вогнута по } x_k} + \overbrace{\varepsilon(x_k)^2}^{\text{Строго вогнута по } x_k}}_{\text{Строго вогнута по } x_k}, \quad \varepsilon > 0$$

Из (I) следует, что $\exists x^\varepsilon$ – ситуация равновесия в игре с функциями F_k^ε .

Рассмотрим $\varepsilon_h \rightarrow 0+0, h = 1, 2, \dots$. Тогда возникает последовательность $x^{\varepsilon_h} \in X$

соответствующих ситуаций равновесия, принадлежащих выпуклому компакт.

²⁰ Лейтцен Эгберт Ян Брауэр (1881 – 1966) – голландский философ и математик, работавший в таких областях математики, как топология, теория множеств, математическая логика, теория меры и комплексный анализ.

Выделим сходящуюся подпоследовательность: $x^{\varepsilon_h} \rightarrow x^0$. Имеем:

$$F_k^{\varepsilon_h}(x^{\varepsilon_h} \| x_k) \leq F_k^{\varepsilon_h}(x^{\varepsilon_h}), \quad \forall x_k \in X_k, k = \overline{1, s} \xRightarrow{\lim_{h \rightarrow \infty}} F_k(x^0 \| x_k) \leq F_k(x^0), \quad \forall x_k \in X_k, k = \overline{1, s}$$

Вернемся к играм двух лиц.

$\Gamma = \langle X, Y, F(x, y), G(x, y) \rangle$. Множества наилучших ответов для нее:

$$\forall y \in Y \quad X(y) = \operatorname{Argmax}_{x \in X} F(x, y)$$

$$\forall x \in X \quad Y(x) = \operatorname{Argmax}_{y \in Y} G(x, y)$$

$$(x^0, y^0): \begin{cases} x^0 \in X(y^0) \\ y^0 \in Y(x^0) \end{cases}$$

Пусть $X(y) = \{x(y)\}$, $Y(x) = \{y(x)\}$, непрерывные по **T1.2**.

$$(x^0, y^0): \begin{cases} x(y^0) = x^0 \\ y(x^0) = y^0 \end{cases} \Rightarrow \text{получим ситуации равновесия.}$$

Приведем несколько *примеров*.

1.

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{4} & \boxed{3} & \boxed{5} & -1 \\ \boxed{4} & -2 & 3 & \boxed{4} \\ 2 & 1 & \boxed{5} & \boxed{4} \\ -1 & 2 & \boxed{5} & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \boxed{7} & 5 & 4 & \boxed{7} \\ 4 & \boxed{5} & \boxed{5} & 4 \\ -3 & \boxed{6} & \boxed{6} & 2 \\ \boxed{8} & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$X(j) = \operatorname{Argmax}_{1 \leq i \leq 4} a_{ij}$$

$$Y(i) = \operatorname{Argmax}_{1 \leq j \leq 4} b_{ij}$$

$$X(1) = \{1, 2\}, \quad Y(1) = \{1, 4\}$$

...

Выделим прямоугольниками соответствующие максимумы.

Найти ситуацию равновесия $\Leftrightarrow (i^0, j^0): \begin{cases} i^0 \in X(j^0) \\ j^0 \in Y(i^0) \end{cases}$

В данном случае таких точек две: $(i^0, j^0) = (1, 1), (3, 3)$.

2.

$$F(x, y) = -3x^2 + 2y^2 + 7xy, \quad X = [0, 1]$$

$$G(x, y) = 4xy - 2y^2 - y, \quad Y = [0, 1]$$

$$F''_{xx} = -6 < 0 \quad \text{— строго вогнута по } x;$$

$$G''_{yy} = -2 < 0 \quad \text{— строго вогнута по } y.$$

$$F'_x = 0 \Rightarrow -6x + 7y = 0 \Rightarrow \bar{x} = \frac{7}{6}y$$

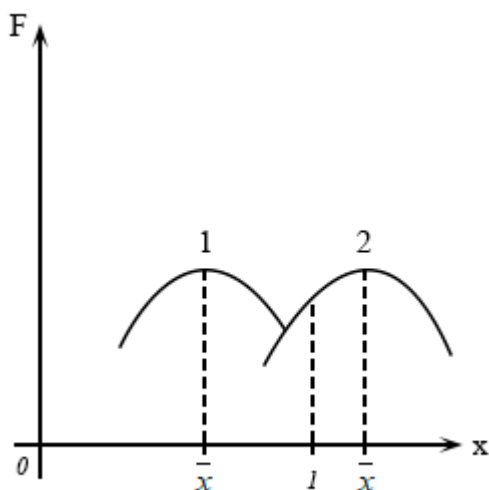


Рис 31.

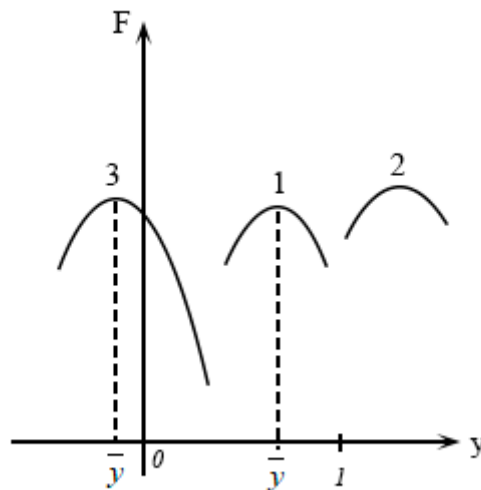


Рис 32.

$$x(y) = \begin{cases} \bar{x} = \frac{7}{6}y, & 0 \leq y \leq \frac{6}{7} \\ 1, & \frac{6}{7} \leq y \leq 1 \end{cases} \quad (\text{рис. 31, 33})$$

$$G'_y = 0 \Rightarrow 4x - 2y - 1 = 0 \Rightarrow \bar{y} = \frac{4x - 1}{2}$$

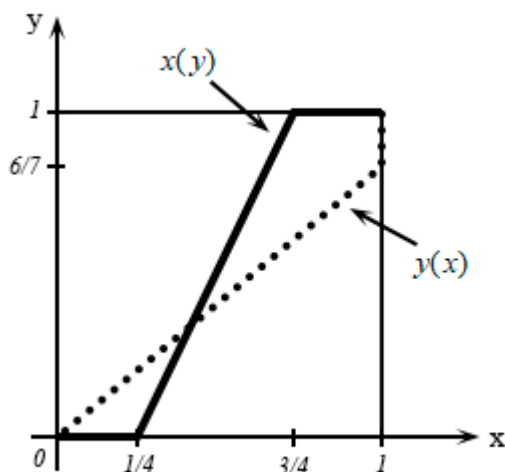


Рис 33.

$$y(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ \frac{y}{x} = \frac{4x-1}{2}, & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ 1, & \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (\text{рис. 32, 33})$$

На пересечении двух графиков на рисунке 33 располагаются 3 точки равновесия.

$$(x^0, y^0) = (1, 1), (1, 1)$$

Найдем третью:

$$\begin{cases} x(y^0) = \frac{7}{6}y^0 = x^0 \\ y(x^0) = \frac{4x^0-1}{2} = y^0 \end{cases} \Rightarrow (x^0, y^0) = \left(\frac{7}{16}, \frac{3}{8}\right)$$

3. Модель дуополии Курно²¹.

Пусть две фирмы производят товар одного и того же вида $x \geq 0, y \geq 0$;

$p(x+y) = a - x - y$ – цена товара, C – себестоимость производства единицы товара и затраты равны Cx и Cy . Тогда выигрыши (прибыли) этих фирм будут равны: $a - y - c$

²¹ Антуан Огюстен Курно (1801 – 1877) – французский экономист, философ и математик.

$$F(x, y) = P(x + y)x - Cx = (a - x - y - C)x, \quad F \cap_x$$

$$G(x, y) = P(x + y)y - Cy = (a - x - y - C)y, \quad G \cap_y$$

$$x(y) = \begin{cases} \frac{a - c - y}{2}, & y < a - c \\ 0, & y \geq a - c \end{cases} \quad (\text{рис. 34, 35})$$

$$y(x) = \begin{cases} \frac{a - c - x}{2}, & x < a - c \\ 0, & x \geq a - c \end{cases} \quad (\text{рис. 34, 35})$$

Упр. Найти (x^0, y^0) – ситуацию равновесия и посмотреть, какая будет сумма $x^0 + y^0$.

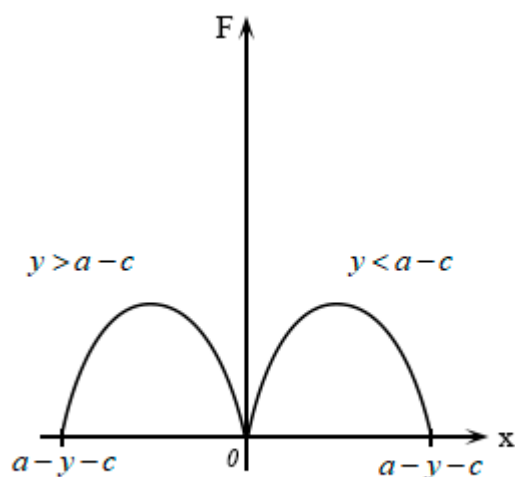


Рис 34.

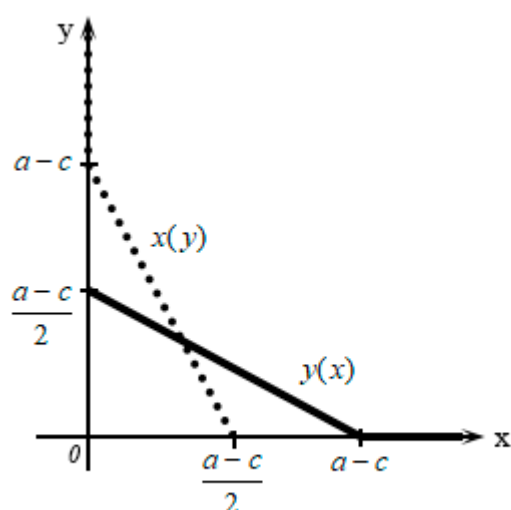


Рис 35.

Упр. Предположить, что одна фирма является монополистом, т.е. $F(x) = (a - x - C)x$, и сравнить количество товара и цену в монополии и дуополии.

Лекция X

Биматричные игры

Пусть задана биматричная игра Γ : $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (B_{ij})_{m \times n}$.

Построим смешанное расширение биматричной игры.

Пусть первый игрок использует смешанные стратегии $p \in P$, второй – $q \in Q$. Их

ожидаемые выигрыши равны $A(p, q) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i a_{ij} q_j$, $B(p, q) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i b_{ij} q_j$, и задано

смешанное расширение $\bar{\Gamma} = \langle P, Q, A(p, q), B(p, q) \rangle$.

Так как функция $A(p, q)$ линейна²² по p , а функция $B(p, q)$ линейна по q , то, ввиду

Т2.1, в игре $\bar{\Gamma}$ всегда существует ситуация равновесия (p^0, q^0) , которую мы будем называть ситуацией равновесия в смешанных стратегиях исходной игры Γ .

Формально запишем ее **определение**:

$$(p^0, q^0): \begin{cases} A(p, q^0) \leq A(p^0, q^0) \quad \forall p \in P \\ B(p^0, q) \leq B(p^0, q^0) \quad \forall q \in Q \end{cases}$$

Лемма 1. Для того, чтобы пара (p^0, q^0) была ситуацией равновесия в смешанных стратегиях, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{cases} A(i, q^0) \leq A(p^0, q^0) \quad \forall i = \overline{1, m} \\ B(p^0, j) \leq B(p^0, q^0) \quad \forall j = \overline{1, n} \end{cases} \quad (*)$$

Отметим, что если взять $B = -A$, то эти неравенства превратятся в условие (*) для оптимальных смешанных стратегий в матричной игре.

Доказательство:

1) (p^0, q^0) – ситуация равновесия $\Rightarrow (*)$

Необходимость следует из определения ситуации равновесия (p и q – произвольны).

2) $(*) \Rightarrow (p^0, q^0)$ – ситуация равновесия

²² В частности, вогнута.

Умножим i -ое неравенство на $p_i \geq 0$ и сложим их:

$$p_i A(i, q^0) \leq p_i A(p^0, q^0) \quad \forall i = \overline{1, m} \Rightarrow A(p, q^0) \leq \sum_{i=1}^m p_i A(p^0, q^0) = A(p^0, q^0) \quad \forall p \in P$$

Аналогично поступаем со вторым неравенством и лемма доказана.

Теорема 2.2 (свойство дополняющей нежесткости²³).

Пусть (p^0, q^0) – ситуация равновесия в смешанных стратегиях. Тогда:

- 1) $p_i^0 > 0 \Rightarrow A(i, q^0) = A(p^0, q^0)$;
- 2) $q_j^0 > 0 \Rightarrow B(p^0, j) = B(p^0, q^0)$.

Доказательство:

По условию, (p^0, q^0) – ситуация в смешанных стратегиях. Тогда по **лемме 1**

выполняется (*). Предположим, что $\exists i_1 : p_{i_1}^0 > 0$, но $A(i, q^0) < A(p^0, q^0)$.

Из (*) следует, что $A(i, q^0) \leq A(p^0, q^0) \quad \forall i = \overline{1, m}$. Домножив оба этих неравенства на $p_{i_1}^0$ и p_i^0 соответственно и сложив их по всем i , получим строгое²⁴ неравенство

$A(p^0, q^0) < A(p^0, q^0)$, что есть противоречие.

Следствие. Пусть (p^0, q^0) – ситуация равновесия в смешанных стратегиях. Тогда:

- 1) $A(i, q^0) < A(p^0, q^0) \Rightarrow p_i^0 = 0$;
- 2) $B(p^0, j) < B(p^0, q^0) \Rightarrow q_j^0 = 0$.

Примеры.

1. «Семейный спор»²⁵.

$$A = \begin{pmatrix} q_1^0 & 1-q_1^0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{matrix} p_1^0 \\ 1-p_1^0 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

²³ Пояснение такого названия уже приводилось в лекции IV при доказательстве аналогичной теоремы.

²⁴ Сумма нестрогого и строгого неравенств является строгим неравенством.

²⁵ Подробно ситуация описывалась в лекции IX.

$$0 \leq p_1^0 \leq 1, \quad 0 \leq q_1^0 \leq 1$$

По свойству дополняющей нежёсткости:

$$\begin{cases} A(1, q^0) = A(p^0, q^0) \\ A(2, q^0) = A(p^0, q^0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1^0 = A(p^0, q^0) \\ 2(1 - q_1^0) = A(p^0, q^0) \end{cases} \Rightarrow q_1^0 = 2(1 - q_1^0) \Rightarrow q_1^0 = \frac{2}{3} \Rightarrow q^0 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\begin{cases} B(p^0, 1) = B(p^0, q^0) \\ B(p^0, 2) = B(p^0, q^0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2p_1^0 = B(p^0, q^0) \\ (1 - p_1^0) = B(p^0, q^0) \end{cases} \Rightarrow 2p_1^0 = (1 - p_1^0) \Rightarrow p_1^0 = \frac{1}{3} \Rightarrow p^0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$A(p^0, q^0) = B(p^0, q^0) = \frac{2}{3}$$

Как разрешить этот спор? Используем т.н. физические смеси²⁶. Муж и жена заполняют каждый свой календарь: по дням они распределяют походы на футбол(Ф) и в театр(Т), причем со своей вероятностью (рис. 36). При совпадении видов досуга супруги идут либо на футбол, либо в театр, а в противном случае остаются дома.

	СБ	ВС	...	СБ	ВС	...	СБ	ВС	...
Муж	Ф	Т		Ф	Ф		Т	Ф	
Жена	Т	Ф		Ф	Т		Т	Т	

Рис 36.

2. Биматричная игра с санкциями.

Рассмотрим следующую модель: первый игрок может либо нарушать(Н) некоторые предписания, либо нет(Б/Н), а второй – наказывать первого, т.е. вводить санкции(С), или нет(Б/С).

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{С} & \text{Б/С} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{Н} \\ \text{Б/Н} \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_2 & > b_2 \\ c_2 & < d_2 \end{pmatrix}$$

Легко показать, что в чистых стратегиях ситуация не разрешима. Сделайте это самостоятельно.

Решая игру в смешанных стратегиях, мы получим следующие результаты:

$$0 \leq p_1^0 \leq 1, \quad 0 \leq q_1^0 \leq 1$$

²⁶ См. лекцию III.

$$q_1^0 = \frac{b_1 - d_1}{c_1 - a_1 + b_1 - d_1}, \quad p_1^0 = \frac{d_2 - c_2}{a_2 - b_2 + d_2 - c_2}$$

Попробуйте также показать это собственноручно.

Можно интерпретировать p_1^0, q_1^0 как части всего множества правил и санкций соответственно и решать уже в терминах физических смесей.

Метод поиска ситуаций равновесия

Теорема 2.3.

Пусть $X = \{1, \dots, m\}, Y = \{1, \dots, n\}$ – множества чистых стратегий игроков, (p^0, q^0) – ситуация равновесия в смешанных стратегиях биматричной игры.

Тогда $\exists X^0 \in X, \exists Y^0 \in Y, \exists V_1, V_2$ такие, что справедливы следующие системы:

$$\begin{cases} \sum_{j \in Y^0} a_{ij} q_j^0 = V_1, \quad \forall i \in X^0 \\ \sum_{j \in Y^0} q_j^0 = 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \sum_{i \in X^0} p_i^0 b_{ij} = V_2, \quad \forall j \in Y^0 \\ \sum_{i \in X^0} p_i^0 = 1 \end{cases} \quad (2)$$

Доказательство:

(1) возьмём $X^0 = \{i \mid p_i^0 > 0\}, V_1 = A(p^0, q^0)$.

$\sum_{j \in Y^0} a_{ij} q_j^0 = A(i, q^0) \stackrel{T2.2}{=} A(p^0, q^0) = V_1, \quad \forall i \in X^0$ и второе равенство, очевидно,

выполняется.

(2) возьмём $Y^0 = \{j \mid q_j^0 > 0\}, V_2 = B(p^0, q^0)$.

$\sum_{i \in X^0} p_i^0 b_{ij} = B(p^0, j) \stackrel{T2.2}{=} B(p^0, q^0) = V_2, \quad \forall j \in Y^0$ и второе равенство, очевидно,

выполняется.

Теорема доказана.

Выпишем неизвестные и матрицы этих систем.

$$(1) \quad q_j^0, j \in Y^0, \quad V_1$$

$$\bar{A} = (a_{ij})_{i \in X^0, j \in Y^0}$$

$$(2) \quad p_i^0, i \in X^0, \quad V_2$$

$$\bar{B} = (b_{ij})_{i \in X^0, j \in Y^0}$$

Если эти матрицы – квадратные, то количество уравнений совпадает с количеством неизвестных, и системы разрешимы. Сформулируем полезное утверждение.

Утв. Найдется такая ситуация равновесия, в которой матрицы $\bar{A}$ и $\bar{B}$ являются квадратными.

Приведем алгоритм поиска некоторых ситуаций равновесия.

- 1) Перебираем квадратные подматрицы $\bar{A}$ и $\bar{B}$ размера $k \times k$, $k = \overline{2, \dots}$.
- 2) На k -ом шаге имеем квадратные матрицы $\bar{A}$ и $\bar{B}$, решаем для них системы (1) и (2).
- 3) Если p_i^0 или q_j^0 – отрицательны, то переходим к следующей, большей подматрице.

Если же p_i^0 или q_j^0 – неотрицательны, то дополняем их до смешанных стратегий:

$$p^0 = \left(\dots, 0, p_i^0, \dots \right)_{\substack{i \notin X^0 \\ i \in X^0}}, \quad q^0 = \left(\dots, 0, q_j^0, \dots \right)_{\substack{j \notin Y^0 \\ j \in Y^0}}$$

Осталось проверить справедливость условия (*) при очевидных равенствах

$$A(p^0, q^0) = V_1, \quad B(p^0, q^0) = V_2:$$

$$\begin{cases} A(i, q^0) \leq V_1, & i = \overline{1, m} \\ B(p^0, j) \leq V_2, & j = \overline{1, n} \end{cases}$$

²⁷ Равенство будет достигаться при $i \in X^0$ и $j \in Y^0$ соответственно.

4) Перебирая все подходящие подматрицы, находим как можно больше ситуаций равновесия в смешанных стратегиях.

Рассмотрим частные случаи.

Пусть матрица – размера $2 \times n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{matrix} p_1 \\ 1-p_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \end{pmatrix}, \quad 0 \leq p_1 \leq 1$$

Согласно алгоритму, будем перебирать квадратные матрицы размера 2×2 , определяемые номерами столбцов j_1, j_2 .

Начнем с смешанной стратегии второго игрока p_1^0 :

$$\bar{B} = \begin{matrix} p_1^0 \\ 1-p_1^0 \end{matrix} \begin{pmatrix} b_{1j_1} & b_{2j_1} \\ b_{1j_2} & b_{2j_2} \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{cases} b_{1j_1} p_1^0 + b_{2j_1} (1 - p_1^0) = V_1 \\ b_{1j_2} p_1^0 + b_{2j_2} (1 - p_1^0) = V_2 \end{cases} \Rightarrow \text{находим } p_1^0$$

Пусть $0 \leq p_1 \leq 1$ ²⁸.

$$q^0 = \left(0, \dots, 0, q^{j_1}, 0, \dots, 0, 1 - q^{j_2}, 0, \dots, 0 \right)$$

$$\bar{A} = \begin{matrix} q^* & 1-q^* \\ a_{1j_1} & a_{2j_1} \\ a_{1j_2} & a_{2j_2} \end{matrix}$$

$$(1) \begin{cases} a_{1j_1} q^* + a_{2j_1} (1 - q^*) = V_1 \\ a_{1j_2} q^* + a_{2j_2} (1 - q^*) = V_1 \end{cases} \Rightarrow \text{находим } q^*$$

Если $0 \leq q^* \leq 1$, то осталось проверить условие (*), т.е. действительно ли оптимальная

²⁸ В противном случае – переходим к следующей подматрице.

стратегия является равновесной.

Очевидно, что
$$\begin{cases} A(1, q^0) = V_1 \\ A(2, q^0) = V_1 \end{cases}.$$

Осталось проверить, что

$$B(p^0, j) \leq V_2, \quad j = \overline{1, n}, \quad j \neq j_1, j_2^{29}$$

Наконец, если неравенство справедливо, то, моё почтение, ситуация равновесия найдена.

Взглянем теперь на геометрическое представление этих выкладок.

Введем функцию $l_j(p_1) = b_{1j}p_1 + b_{2j}(1 - p_1) = B(p, j)$. (Рис. 37)

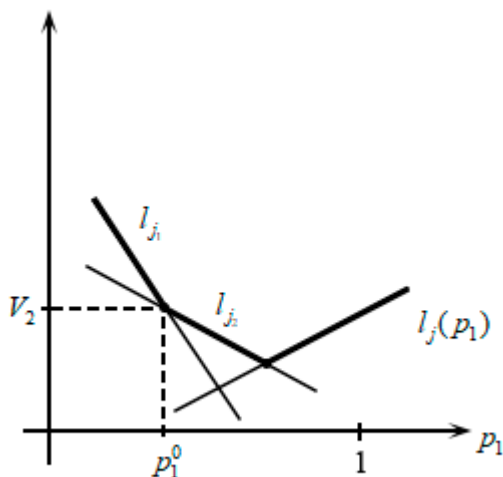


Рис 37.

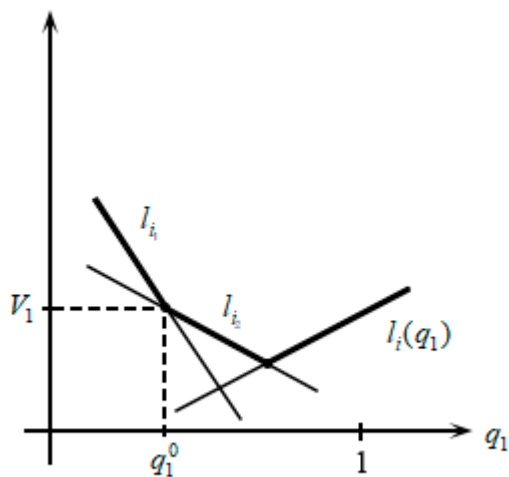


Рис 38.

$$\begin{cases} l_{j_1}(p_1) = V_2 \\ l_{j_2}(p_1) = V_2 \end{cases} \Rightarrow l_{j_1}(p_1) = l_{j_2}(p_1)$$

$$(*) \quad l_j(p_1^0) \leq V_2, \quad j \neq j_1, j_2$$

Проверяя последовательно все точки излома, получим соответствующие ситуации равновесия.

²⁹ При $j = j_1, j = j_2$ неравенство переходит в равенство.

Рассмотрим теперь случай с матрицей размеров $m \times 2$.

$$A = \begin{pmatrix} q_1 & 1-q_1 \\ a_{11} & a_{12} \\ \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix}, \quad 0 \leq q_1 \leq 1,$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} \\ \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} \end{pmatrix}$$

Здесь функция имеет вид $l_i(q_1) = a_{i1}q_1 + a_{i2}(1-q_1) = B(i, q)$. (Рис. 38)

$$\begin{cases} l_{i_1}(q_1) = V_1 \\ l_{i_2}(q_1) = V_1 \end{cases} \Rightarrow l_{i_1}(q_1) = l_{i_2}(q_1)$$

$$(*) \quad l_i(q_1^0) \leq V_1, \quad i \neq i_1, i_2$$

$$p^0 = \left(0, \dots, 0, p^*, 0, \dots, 0, 1 - p^*, 0, \dots, 0 \right)$$

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} b_{i_1 1} & b_{i_1 2} \\ b_{i_2 1} & b_{i_2 2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} b_{i_1 1}p^* + b_{i_2 1}(1-p^*) = V_2 \\ b_{i_1 2}p^* + b_{i_2 2}(1-p^*) = V_2 \end{cases} \Rightarrow p^*$$

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{matrix} p_1 \\ 1-p_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

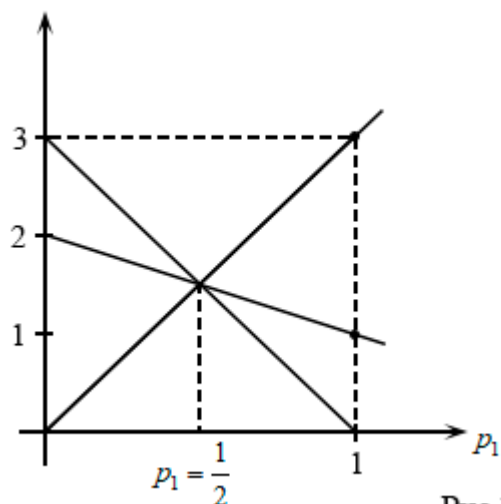


Рис 39.

$$l_j(p_1): \begin{cases} l_1(p_1) = 3p_1 \\ l_2(p_1) = p_1 + 2(1 - p_1) = 2 - p_1 \\ l_3(p_1) = 3(1 - p_1) \end{cases} \quad (\text{рис. 39})$$

$$1) \quad l_1 \cap l_2: 3p_1 = 2 - p_1 \Rightarrow p_1^0 = \frac{1}{2}$$

$$A = \begin{pmatrix} q_1 & 1-q_1 & 0 \\ \boxed{2} & \boxed{4} & 5 \\ \boxed{4} & \boxed{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{matrix} p_1 & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ 1-p_1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 2q^* + 4(1 - q^*) = V_1 \\ 4q^* + 2(1 - q^*) = V_1 \end{cases} \Rightarrow 2q^* + 4(1 - q^*) = 4q^* + 2(1 - q^*) \Rightarrow q^* = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} p^0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \\ q^0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right) \end{cases}$$

$$2) \quad l_1 \cap l_3: p_1^0 = \frac{1}{2}$$

$$A = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 1-q_1 \\ \boxed{2} & 4 & \boxed{5} \\ \boxed{4} & 2 & \boxed{1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{matrix} p_1 & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ 1-p_1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 2q^* + 5(1 - q^*) = V_1 \\ 4q^* + (1 - q^*) = V_1 \end{cases} \Rightarrow 2q^* + 5(1 - q^*) = 4q^* + (1 - q^*) \Rightarrow q^* = \frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} p^0 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ q^0 = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right) \end{cases}$$

$$3) \quad l_2 \cap l_3: \quad p_1^0 = \frac{1}{2}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & q_1 & 1-q_1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{matrix} p_1 & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ 1-p_1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 4q^* + 5(1 - q^*) = V_1 \\ 2q^* + (1 - q^*) = V_1 \end{cases} \Rightarrow 4q^* + 5(1 - q^*) = 2q^* + (1 - q^*) \Rightarrow q^* = 2 \text{ и ситуации равновесия } \exists$$

Доминирование в биматричных играх

Приведем две аналогичные **Т1.11** и **Т1.12** теоремы.

Теорема 2.4 (о доминировании строк биматричной игры).

Пусть в биматричной игре некоторая строка матрицы A доминируется выпуклой комбинацией остальных строк этой матрицы. Тогда эта строка входит с нулевой вероятностью в некоторую равновесную смешанную стратегию первого игрока, и ее можно вычеркнуть.

Если указанное доминирование строгое, то доминируемая строка входит с нулевой вероятностью в любую равновесную смешанную стратегию первого игрока.

Теорема 2.5 (о доминировании столбцов биматричной игры).

Пусть некоторый столбец матрицы A доминирует³⁰ выпуклую комбинацию остальных

³⁰ Лектор здесь сказал, что столбец матрицы должен доминироваться остальными столбцами, однако в **Т1.12** говорится о том, что столбец должен доминировать остальные столбцы. Вероятно, он оговорился.

столбцов этой матрицы. Тогда этот столбец входит с нулевой вероятностью в некоторую равновесную смешанную стратегию второго игрока, и его можно вычеркнуть.

Если указанное доминирование строгое, то доминирующий столбец входит с нулевой вероятностью в любую равновесную смешанную стратегию второго игрока.

Доказательство обеих теорем повторяет доказательство соответствующих *T1.11* и *T1.12*

Рассмотрим *пример*.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

При вычеркивании первого столбца получилась бы биматричная игра без ситуаций равновесия в чистых стратегиях, хотя в исходной игре она была. Поэтому, при использовании доминирования, нужно быть крайне внимательным.

Лекция XI

Иерархические игры

$$\Gamma = \langle X, Y, F(x, y), G(x, y) \rangle$$

Будем считать, что X, Y – компакты метрических пространств, функции

$F(x, y), G(x, y)$ – непрерывны на $X \times Y$.

Определим некоторые иерархические игры.

1. Игра $\Gamma_1: x \xrightarrow{2} y$,

т.е. первый игрок выбирает x , второй игрок выбирает y , зная о выборе x .

У этой игры есть следующая экономическая интерпретация: первый игрок – центр, выбирающий цену x некоторой продукции, производимой вторым игроком в количестве y .

Положим, второй игрок обязательно выберет стратегию

$y \in Y(x) = \underset{y \in Y}{\operatorname{Argmax}} G(x, y)$, оптимальную для себя.

$W(x) = \min_{y \in Y(x)} F(x, y)$ – гарантированный выигрыш первого игрока.³¹

$F_1 = \sup_{x \in X} W(x)$ – наилучший гарантированный выигрыш первого игрока.

Опр. Пусть $\varepsilon > 0$. Стратегия $x^\varepsilon \in X$ называется эпсилон-оптимальной, если

$$W(x^\varepsilon) \geq F_1 - \varepsilon.$$

Пусть $Y(x) = \{y(x)\}$, $\forall x \in X$. В этом случае, по **Т1.2**, отображение $y(x)$ – непрерывно и $W(x) = F(x, y(x))$ ³².

Решить иерархическую игру Γ_1 означает найти наилучший гарантированный выигрыш и указать оптимальную, если она существует, либо эпсилон –оптимальную стратегию.

³¹ Считается, что второй игрок себя максимизирует, но его дальнейшее поведение неизвестно: в худшем случае первый игрок рассчитывает на получение минимума.

³² В этом случае $W(x)$ также непрерывна и её максимум достигается.

Равновесие по Штакельбергу³³

Предположим, как и ранее, что первый игрок сообщает второму $x \in X$, второй выбирает $y \in Y(x)$ – наилучший ответ на x . Условимся теперь, что второй игрок благожелателен к первому, т.е., выбирая y , он учитывает пожелания первого игрока:

$$y \in Y^*(x) = \underset{y \in Y(x)}{\operatorname{Argmax}} F(x, y).$$

В этом случае гарантированный выигрыш первого игрока будет равен

$$W^*(x) = \max_{y \in Y(x)} F(x, y), \text{ а гарантированный выигрыш } - F_1^* = \max_{x \in X} W^*(x).$$

Опр. Пара (x^0, y^0) называется равновесием по Штакельбергу, если

$$W^*(x) = F_1^*, \quad y^0 \in Y^*(x^0).$$

Лемма 2. В сделанных предположениях в игре существует равновесие по Штакельбергу.

Доказательство: пусть $F_1^* = \sup_{x \in X} W^*(x)$. Рассмотрим последовательность

$$x^k \in X : W^*(x^k) \rightarrow F_1^*.$$

Ввиду того, что все последовательности x^k принадлежат компакту X , без ограничения общности постулируем, что $x^k \rightarrow x^0$. Рассмотрим также $y^k \in Y^*(x_k)$, $y^k \rightarrow y^0$.

Покажем, что $y^0 \in Y(x^0)$:

$$G(x^k, y) \leq G(x^k, y^k), \quad \forall y \in Y$$

Перейдя к пределу, получим $G(x^0, y) \leq G(x^0, y^0)$, $\forall y \in Y$.

$$F_1^* \leftarrow W^*(x^k) = F(x^k, y^k) \rightarrow F(x^0, y^0) \Rightarrow F_1^* = F(x^0, y^0)$$

$$F_1^* = F(x^0, y^0) \stackrel{y^0 \in Y(x^0)}{\leq} W^*(x^0)$$

³³ Генрих фон Штакельберг (1905 – 1946) – немецкий экономист, работавший в области теории организации промышленности, теории игр и известный как автор модели иерархического взаимодействия.

Строгого неравенства здесь быть не может, т.к. F_1^* – супремум значений $W^*(x^0)$,

поэтому $F_1^* = F(x^0, y^0) \stackrel{y^0 \in Y(x^0)}{=} W^*(x^0)$ и лемма доказана.

Примеры.

1)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & -5 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 7 & 7 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решим игру Γ_1 .

$$Y(i) = \operatorname{Argmax}_{1 \leq j \leq 3} b_{ij},$$

$$Y(1) = \{1\}^{34}, \quad Y(2) = \{1, 2\}, \quad Y(3) = \{2, 3\};$$

$$W(i) = \min_{y \in Y(i)} a_{iy},$$

$$W(1) = 3, \quad W(2) = 3, \quad W(3) = -5;$$

$$F_1 = 3, \quad i^0 = 1, 2.$$

Найдем равновесие по Штакельбергу.

Построим $Y^*(i)$:

$$Y^*(1) = \{1\} \Rightarrow W^*(1) = 3,$$

$$Y^*(2) = \{1\} \Rightarrow W^*(2) = 4,$$

$$Y^*(3) = \{3\} \Rightarrow W^*(3) = 4;$$

$$F_1^* = 4.$$

$$(i^0, j^0) = (2, 1), (3, 3)$$

Отметим, что если первый игрок также благожелателен ко второму, то он выберет

(2, 1) вместо (3, 3), чтобы второй получил не 1, а 7.

³⁴ Речь про столбцы.

2)

$$\begin{cases} F(x, y) = 3x + 2y \\ G(x, y) = (x - y)^2, \quad x \in [0, 1], \quad y \in [0, 1] \end{cases}$$

Решим игру Γ_1 .

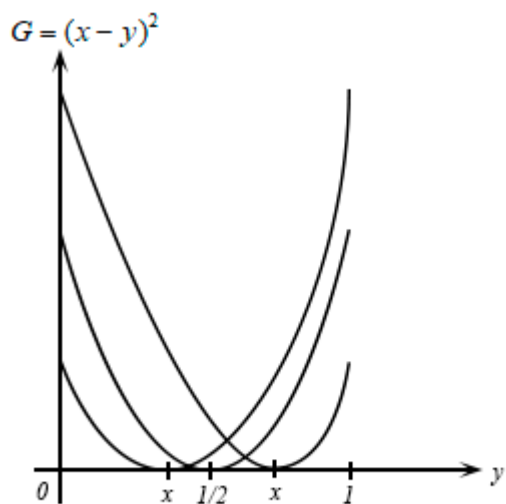


Рис 40.

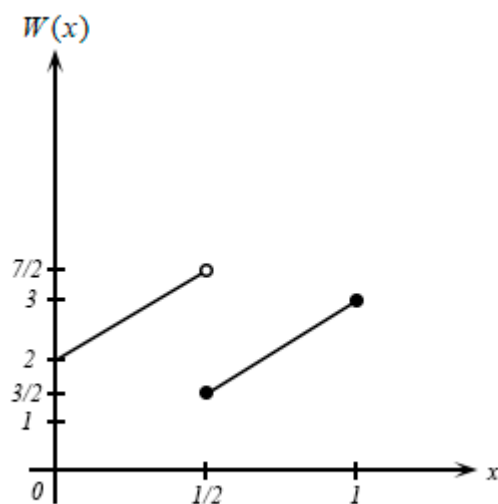


Рис 41.

$$Y(x) = \begin{cases} \{1\}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ \{0, 1\}, & x = \frac{1}{2}; \\ \{0\}, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (\text{рис. 40})$$

$$W(x) = \min_{y \in Y(x)} (3x + 2y) \quad (\text{рис. 41})$$

$$F_1 = \frac{7}{2}, \quad x^\varepsilon = \frac{1}{2} - \varepsilon.$$

Найдем равновесие по Штакельбергу.

$$W^*(x) = \min_{y \in Y(x)} (3x + 2y), \text{ разница между функциями } W(x) \text{ и } W^*(x) \text{ будет в том, что}$$

непрерывность в точке $\frac{1}{2}$ справа сменится на непрерывность слева (см. рис. 41).

$$F_1 = \frac{7}{2}, \quad (x^0, y^0) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

3) Первый игрок – центр, выбирающий цену на продукцию $x \in [0, c]$, второй – производитель, выбирающий $y \geq 0$ – количество товара. Функции выигрыша:

$$F(x, y) = cy - xy = (c - x)y$$

$$G(x, y) = xy - by^2$$

Найдем $Y(x): \max_{y \geq 0} (xy - by^2)$.

$$G'_y = 0 \Leftrightarrow x - 2by = 0 \Rightarrow \bar{y} = \frac{x}{2b} \geq 0 \Rightarrow y(x) = \frac{x}{2b}$$

$$W(x) = F(x, y(x)) = (c - x) \frac{x}{2b} \Rightarrow x^0 = \frac{c}{2}, \quad F_1 = W(x^0) = \frac{c^2}{8b}$$

Аналитически мы получили, что посредник, перепродающий продукцию, имеет выгоду в 100% от суммы: продает по цене c , а покупает по цене $\frac{c}{2}$.

2. Игра $\Gamma_2: f \xrightarrow{2} y \xrightarrow{1} x = f(y)$, т.е. первый игрок изначально будет иметь информацию об y , он заготавливает функцию $f: Y \rightarrow X$ и сообщает второму игроку значение $x = f(y)$.

Экономическая интерпретация этой игры: первый игрок – центр, x – размер премии; второй игрок – производитель, выпускающий некоторое количество продукции y .

Премия присуждается за выполнение плана по выпуску.

Другая интерпретация – политические игры, где за принятием условий одной стороны последует некоторая реакция, а за неприятием – наказание.

$$y \in Y(f) = \operatorname{Argmax}_{y \in Y} G(f(y), y)^{35}$$

$$y \in Y(f) = \begin{cases} Y(f), & Y(f) \neq \emptyset \\ Y, & Y(f) = \emptyset \end{cases}$$

$W(f) = \inf_{y \in Y(f)} F(f(y), y)$ – гарантированный выигрыш первого игрока.

³⁵ Возможен случай, когда $Y(f) = \emptyset$, т.е. поведение второго игрока никак не регламентировано.

$F_2 = \sup_{f \in \{f\}} W(f)$ – наилучший гарантированный выигрыш первого игрока.

Опр. Пусть $\varepsilon > 0$. Стратегия $f^\varepsilon \in \{f\}$ называется эпсилон-оптимальной, если $W(f^\varepsilon) \geq F_2 - \varepsilon$.

Минимизирующие стратегии

Опр. Стратегией наказания называется $f^H : f^H(y) \in \underset{x \in X}{\operatorname{Argmin}} G(x, y), \forall y \in Y$.

Пусть $G_2 = \max_{y \in Y} \min_{x \in X} G(x, y)$

$$D = \{ (x, y) \mid G(x, y) > G_2 \}$$

$$K = \begin{cases} \sup F(x, y), & D \neq \emptyset \\ -\infty, & D = \emptyset \end{cases}$$

$\varepsilon > 0: \exists (x^\varepsilon, y^\varepsilon) \in D: F(x^\varepsilon, y^\varepsilon) \geq K - \varepsilon$,

$$f_k^\varepsilon(y) = \begin{cases} x^\varepsilon, & y = y^\varepsilon \\ f^H(y), & y \neq y^\varepsilon \end{cases}$$

Покажем, что $W(f_k^\varepsilon) \geq K - \varepsilon$, т.е. что эта стратегия позволяет получить первому игроку гарантированный выигрыш $K - \varepsilon$.

В самом деле, если первый игрок сообщает второму функцию f_k^ε , то второй игрок рассуждает так:

$$f_k^\varepsilon(y) = \begin{cases} x^\varepsilon, & y = y^\varepsilon \Rightarrow G(x^\varepsilon, y^\varepsilon) > G_2 \\ f^H(y), & y \neq y^\varepsilon \Rightarrow G(f^H(y), y) = \min_{x \in X} G(x, y) \leq G_2 \end{cases},$$

т.е. второй игрок, ввиду своей рациональности, всегда будет выбирать $y = y^\varepsilon$.

$$Y(f_k^\varepsilon) = \{y^\varepsilon\}, \quad W(f_k^\varepsilon) = F(x^\varepsilon, y^\varepsilon) \geq K - \varepsilon.$$

Рассмотрим другую минимизирующую стратегию.

Пусть $E = \operatorname{Argmax}_{y \in Y} \left[\min_{x \in X} F(x, y) \right]$ – множество максиминных стратегий второго игрока,

$X(y) = \operatorname{Argmax}_{x \in X} F(x, y)$ – множество наилучших ответов первого игрока.

Будем рассматривать ситуацию, когда уже первый игрок благожелателен ко второму:

$$X^k(y) = \operatorname{Argmax}_{x \in X(y)} G(x, y).$$

Теперь определим стратегию функции наилучшего ответа.

$$f^*: f^*(y) \in X^*(y)$$

$$G(f^*(y), y) = \max_{x \in X(y)} G(x, y) = W^*(y)^{36}$$

$$M = \min_{y \in E} \max_{x \in X} F(x, y)$$

Определим стратегию, которая позволяет гарантировать получение величины M .

$$f_M^0(y) = \begin{cases} f^*(y), & y \in E \\ f^H(y), & y \notin E \end{cases}$$

Покажем, что $W(f_M^0) \geq M$.

В самом деле, если первый игрок сообщает второму функцию f_M^0 , то второй игрок рассуждает так:

$$f_M^0(y) = \begin{cases} f^*(y), & y \in E \Rightarrow G(f^*(y), y) \geq \min_{x \in X} G(x, y) = G_2 \\ f^H(y), & y \notin E \Rightarrow G(f^H(y), y) = \min_{x \in X} G(x, y) < G_2 \end{cases}, \text{ т.е. второй игрок,}$$

ввиду своей рациональности, всегда будет выбирать $y \in E$.

$$Y(f_M^0) \subset E,$$

$$W(f_M^0) = \inf_{y \in Y(f_M^0) \subset E} F(f^*(y), y) \geq \min_{y \in E} F(f^*(y), y) = \min_{y \in E} \max_{x \in X} F(x, y) = M.$$

³⁶ По **Л2** она достигает максимума на любом компакте.

Теорема 2.6 (Гермейера³⁷).

В сделанных предположениях в игре Γ_2 наилучший гарантированный выигрыш

$F_2 = \max[K, M]$. При этом, если:

- 1) $K > M$, то $\forall \varepsilon > 0$ f_k^ε – эpsilon- ε оптимальная стратегия;
- 2) $K \leq M$, то f_M^0 – оптимальная стратегия.

Прежде, чем доказать теорему, рассмотрим пару $(x^0, y^0) \in \underset{\substack{x \in X \\ y \in Y}}{\operatorname{Argmax}} F(x, y)$.

Может оказаться, что $(x^0, y^0) \in D$. Если такое случилось, то

$K = F(x^0, y^0) = \max_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} F(x, y)$, т.е. второй игрок настолько эффективно управляет

первым, что заставляет его полностью работать на себя.

³⁷ Юрий Борисович Гермейер (1918 – 1975) – советский учёный, специалист в области прикладной математики, исследования операций и теории игр.

Лекция XII

В конце прошлой лекции была сформулирована *теорема Гермейера*. Приведём её доказательство.

Часть теоремы уже была доказана, т.к. мы показали, что K всегда можно достигнуть и $W(f_k^\varepsilon) \geq K - \varepsilon$, $W(f_M^0) \geq M$.

Осталось показать, что величину F_2 , большую, чем $\max[K, M]$, получить нельзя:

$$\forall f \in \{f\} \quad W(f) \leq \max[K, M].$$

$$\sup_{y \in Y} G(f(y), y) \geq \max_{y \in Y} \min_{x \in X} G(x, y) = G_2$$

Рассмотрим два случая:

$$1) \sup_{y \in Y} G(f(y), y) > G_2$$

Тогда $\exists y^0 \in Y(f): (f(y^0), y^0) \in D$, т.к.

$$a) y^0 \in Y(f) \Rightarrow G(f(y^0), y^0) > G_2 \Rightarrow (f(y^0), y^0) \in D;$$

$$b) Y(f) = \emptyset, Y(f) = Y \Rightarrow \exists y^0: G(f(y^0), y^0) > G_2 \Rightarrow (f(y^0), y^0) \in D.$$

$$W(f) = \inf_{y \in Y(f)} F(f(y), y) \leq \underbrace{F(f(y^0), y^0)}_{\in D} \leq K \leq \max[K, M]$$

$$2) \sup_{y \in Y} G(f(y), y) = G_2$$

Тогда $\forall y^0 \in E: G(f(y^0), y^0) = G_2$, т.к. $\underline{G}_2 = \min_{x \in X} G(x, y^0) \leq G(f(y^0), y^0) \leq$

$$\leq \sup_{y \in Y} G(f(y), y) = \underline{G}_2 \Rightarrow G(f(y^0), y^0) = \sup_{y \in Y} G(f(y), y)$$

Фактически, мы доказали, что $E \subset Y(f)$.

$$W(f) = \inf_{y \in Y(f)} F(f(y), y) \leq \min_{y \in E} \max_{x \in X} F(x, y) = M \leq \max[K, M]$$

Теорема полностью доказана.

Примеры.

1.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & -5 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 7 & 7 & 3 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Решим игру Γ_2 .

$$G_2 = \max_{1 \leq j \leq 3} \min_{1 \leq i \leq 3} b_{ij} = 4, \quad E = \{1, 2\}$$

$$D = \{ (i, j) \mid b_{ij} > G_2 = 4 \}^{38}$$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 6 & 8 \\ \boxed{4} & \boxed{3} & 2 \\ 7 & \boxed{-5} & \boxed{4} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \boxed{7} & 4 & 3 \\ \boxed{7} & \boxed{7} & 3 \\ 4 & \boxed{6} & \boxed{6} \end{pmatrix}$$

$$K = \max_{(i,j) \in D} a_{ij} = 4^{39}$$

$$M = \min_{j \in E} \max_{1 \leq i \leq 3} a_{ij} = 6 > K = 4 \Rightarrow F_2 = 6$$

$$f_M^0(j) = \begin{cases} 3, & j = 1 \in E \\ 1, & j = 2 \in E \\ 1 \text{ (или 2)}, & j = 3 \notin E \end{cases} \quad (\text{в первой строке, например, } 3 \in X(j) = \operatorname{Argmax}_{1 \leq i \leq 3} a_{ij})$$

$$f_K^0(j) = \begin{cases} 2, & j = 1 \\ 1, & j = 2 \\ 1, & j = 3 \end{cases}$$

2. Знакомая нам задача с центром и производителем. Напомним условие.

Первый игрок – центр, выбирающий цену на продукцию $x \in [0, c]$, второй –

производитель, выбирающий $y \geq 0$ – количество товара. Функции выигрыша:

$$F(x, y) = cy - xy = (c - x)y;$$

³⁸ В матрице B мы обвели элементы, строго большие $G_2 = 4$, а в матрице A – те же позиционно, что и в матрице B .

³⁹ Максимум из обведенных элементов матрицы A .

$$G(x, y) = xy - by^2.$$

Решим игру Γ_2 .

$$G_2 = \max_{y \geq 0} \min_{0 \leq x \leq c} (xy - by^2) = 0, \quad E = \{0\}$$

$$M = \min_{y \geq 0} \max_{0 \leq x \leq c} [y(c - x)] = 0$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid xy - by^2 > G_2 = 0 \right\} \quad (\text{рис. 42})$$

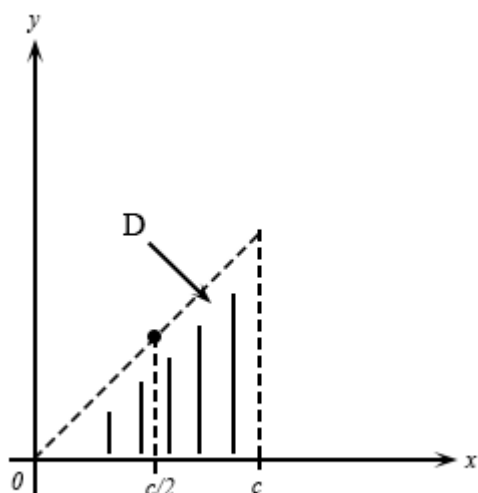


Рис 42.

$$K = \sup_{\substack{0 \leq x \leq c \\ 0 \leq y \leq \frac{x}{b}}} [y(c - x)] = \max_{0 \leq x \leq c} \left[\frac{x}{b} (c - x) \right] = \left\{ x^0 = \frac{c}{2} \right\} = \frac{c^2}{4b}$$

$$f_K^\varepsilon(y) = \begin{cases} \frac{c}{2}, & y = \frac{c}{2b} - \varepsilon = y\varepsilon \\ 0, & y \neq y\varepsilon \end{cases}$$

Мы получили, таким образом, что в игре Γ_2 , в отличие от игры Γ_1 , прибыль производителя близка к нулю.

Теория принятия решений. Многокритериальная или векторная оптимизация

ЛПР – лицо, принимающее решения (не путать с ЛДПР!)

Пусть имеется ЛПР, выбирающее стратегию $x \in X$,

$W(x) = (W_1(x), \dots, W_s(x))$ – векторная оценка,

$W_i(x)$, $i = \overline{1, s}$, – частный критерий.

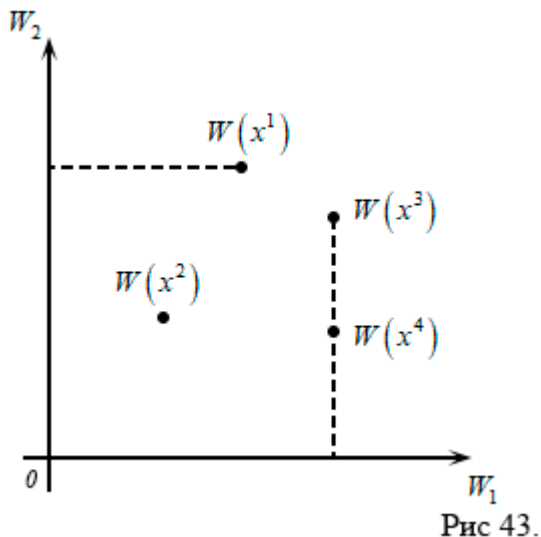
В этих условиях необходимо выбрать $x \in X$. Основная трудность здесь в том, что, как правило, нет x^0 , максимизирующего все частные критерии⁴⁰, т.е. что

$$\nexists x^0 \in X : x^0 \in \underset{x \in X}{\operatorname{Argmax}} W_i(x), \quad i = \overline{1, s}$$

Пример.

$$X = \{x^1, x^2, x^3, x^4\}, \quad W(x) = (W_1(x), W_2(x))$$

В этом случае векторные оценки можно изображать на плоскости (рис. 43).



$$\underset{x \in X}{\operatorname{Argmax}} W_1(x) = \{x^3, x^4\}$$

$$\underset{x \in X}{\operatorname{Argmax}} W_2(x) = \{x^1\}$$

Эти множества, очевидно, не пересекаются, что есть препятствие на пути поиска оптимальной стратегии. Познакомимся со способами его преодоления.

⁴⁰ Для удобства мы условимся именно максимизировать частные критерии. Если в задаче требуется их минимизировать, то достаточно будет сменить знак у максимумов на противоположный.

Оптимальность по Парето и Слейтеру

Опр. Стратегия $x^0 \in X$ называется оптимальной по Парето, если

$$\nexists x \in X : W_i(x) \geq W_i(x^0), \quad i = \overline{1, s}, \quad W(x) \neq W(x^0)^{41}.$$

Обозначим $P(X, W)$ множество всех стратегий из X , оптимальных по Парето по критерию W .

Для предыдущего примера $P(X, W) = \{x^1, x^3\}$. Есть простой способ проверить оптимальность по Парето: строим «уголок»⁴² и смотрим, есть ли внутри него другие векторные оценки или нет (см. рисунок). Если их нет, то стратегия оптимальна.

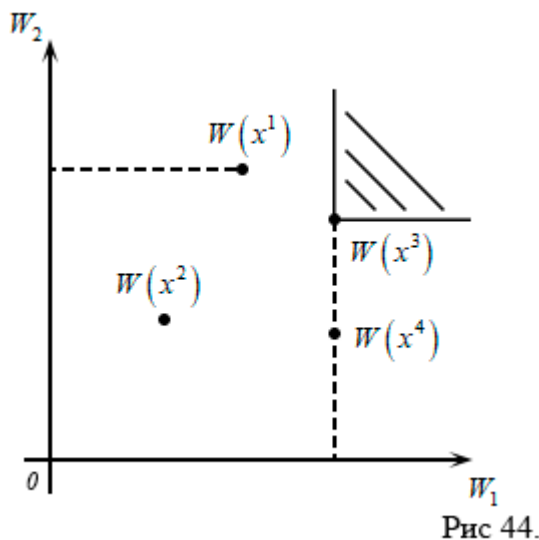


Рис 44.

Опр. Стратегия $x^0 \in X$ называется оптимальной по Слейтеру⁴³, если

$$\nexists x \in X : W_i(x) > W_i(x^0), \quad i = \overline{1, s}.$$

Обозначим $S(X, W)$ множество всех стратегий из X , оптимальных по Слейтеру по критерию W .

Для нашего примера $S(X, W) = \{x^1, x^3, x^4\}$.

Очевидно, что $P(X, W) \subset S(X, W)$.

⁴¹ Хотя бы один частный критерий $W(x)$ строго больше соответствующего частного критерия $W(x^0)$.

⁴² Лектор, кажется, называет его «артантом». Моя искал, но не понимаю.

⁴³ Мортон Линкольн Слейтер – американский математик, доктор наук.

Задача «о коробке».

Имеем прямоугольник размера $a \times b$, $a < b$. Нам необходимо сделать из него коробку (см. рис. 45).

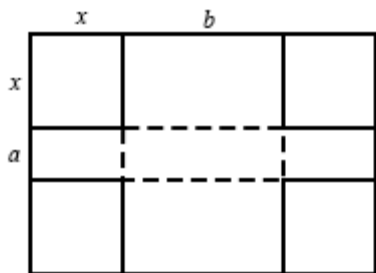


Рис 45.

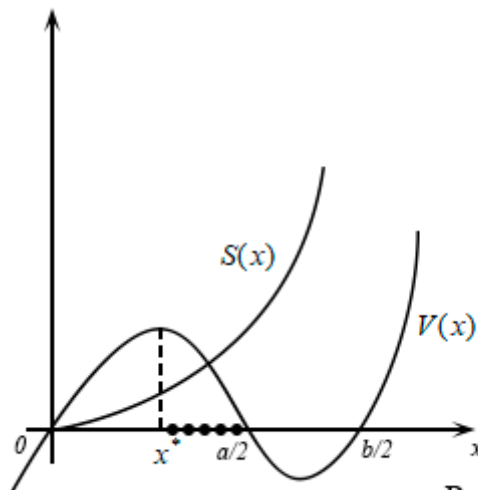


Рис 46.

$$x \in X = \left(0, \frac{a}{2}\right)$$

$W_1(x) = (a - 2x)(b - 2x)x = V(x)$ — объем коробки;

$W_2(x) = 4x^2 = S(x)$ — площадь (этот материал можно будет использовать).

(рис. 46)

Утверждается, что $P(X, W) = \left[x^*, \frac{a}{2}\right]$, так как если $x \in (0, x^*]$, оба критерия возрастают и это, очевидно, не оптимальный случай.

Задача многокритериальной оптимизации состоит в том, чтобы построить множества $P(X, W)$ и $S(X, W)$ или их аппроксимации.

Когда множество $P(X, W) \neq \emptyset$? Сформулируем соответствующую теорему.

Теорема 3.1. Пусть все частные критерии $W_i(x)$, $i = \overline{1, s}$ — непрерывны на компакте X . Тогда $P(X, W) \neq \emptyset$ ($\Rightarrow S(X, W) \neq \emptyset$).

Доказательство: воспользуемся т.н. свёрткой критерия с некоторыми весовыми коэффициентами. Рассмотрим вектор весовых коэффициентов

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s) \in \Lambda = \left\{ \lambda \mid \sum_{i=1}^s \lambda_i = 1, \lambda_i > 0, i = \overline{1, s} \right\}, \text{ свертку } F_1(\lambda, x) = \sum_{i=1}^s \lambda_i W_i(x)^{44}.$$

Докажем, что $\forall \lambda \in \Lambda \quad X_1(\lambda) = \operatorname{Argmax}_{x \in X} F_1(\lambda, x) \subset P(X, W)$. Пусть это не так, тогда

$$\exists x' \in X_1(\lambda) \setminus P(X, W) \Rightarrow \exists x: W_i(x) \geq W_i(x'), i = \overline{1, s}, W(x) \neq W(x') \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{ \text{домножим каждое неравенство на } \lambda_i \text{ и сложим их} \} \Rightarrow F_1(\lambda, x) > F_1(\lambda, x'), \text{ что}$$

есть противоречие, т.к. $x' \in X_1(\lambda)$ максимизирует свертку, а мы нашли другую стратегию, дающую большее значение для этой свертки.

Справедливо ли равенство $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_1(\lambda) = P(X, W)$? На самом деле, далеко не всегда.

Рассмотрим *пример*.

$$W(x) = (W_1(x), W_2(x)), W_1(x) = x_1, W_2(x) = x_2 \quad (\text{рис. 47})$$

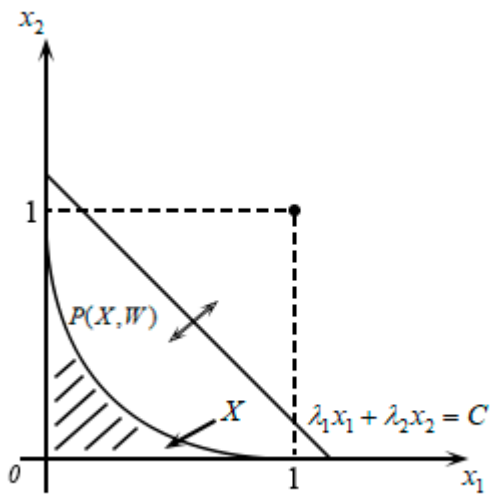


Рис 47.

$$F_1(\lambda, x) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$$

Из рисунка видно, что $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_1(\lambda) \subset \{(0,1), (1,0)\}$, в то время как оптимальными являются все точки дуги окружности.

⁴⁴ Функция непрерывна на компакте и ее максимум достигается.

Определим другую свертку:

$$F_2 = \min_{1 \leq i \leq s} \lambda_i W_i(x), \quad W_i(x) > 0$$

Упр. Покажите, что если $V_i(x) = W_i(x) + C_i$, $i = \overline{1, s}$, то выполнено $P(X, V) = P(X, W)$.

$$X_2(\lambda) = \operatorname{Argmax}_{x \in X} F_2(\lambda, x)$$

Теорема 3.2. Пусть все частные критерии $W_i(x)$, $i = \overline{1, s}$ – положительны и непрерывны на компакте X .

$$\text{Тогда } \bigcap_{\lambda \in \Lambda} X_2(\lambda) = S(X, W). \quad (1)$$

Доказательство: покажем двустороннее вложение множеств.

$$1) \quad \forall \lambda \in \Lambda \quad X_2(\lambda) \subset S(X, W)$$

Пусть это не так, тогда

$$\exists x' \in X_2(\lambda) \setminus S(X, W) \Rightarrow \exists x: W_i(x) > W_i(x'), \quad i = \overline{1, s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \text{домножим каждое неравенство на } \lambda_i \text{ и возьмем минимум от обеих частей} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_2(\lambda, x) > F_2(\lambda, x'), \text{ что есть противоречие, т.к. } x' \in X_2(\lambda) \text{ максимизирует свертку } F_2(\lambda, x').$$

$$2) \quad \forall x^0 \in S(X, W) \quad \exists \lambda^0 \in \Lambda: \quad x^0 \in X_2(\lambda^0)$$

$$\lambda^0: \quad \lambda_i^0 = \frac{1}{W_i(x^0) \sum_{k=1}^s \frac{1}{W_k(x^0)}} > 0$$

$$\forall x \in X \quad \exists j: \quad W_j(x) \leq W_j(x^0)$$

$$F_2(\lambda^0, x) = \min_{1 \leq i \leq s} \lambda_i^0 W_i(x) \leq \lambda_j^0 W_j(x) \leq \lambda_j^0 W_j(x^0) = \frac{1}{\sum_{k=1}^s \frac{1}{W_k(x^0)}} = \min_{1 \leq i \leq s} \lambda_i^0 W_i(x^0) = F_2(\lambda^0, x^0)$$

Теорема доказана.

Лекция XIII

Приведем альтернативные формулировки оптимальности по Парето.

Опр. Пусть $x, x' \in X$. Будем говорить, что стратегия x лучше стратегии x' в смысле Парето, если $W_i(x) \geq W_i(x')$, $i = \overline{1, s}$, $W(x) \neq W(x')$. Обозначение: $x \pm x'$.

Опр. Пусть $x, x' \in X$. Будем говорить, что стратегия x строго лучше стратегии x' в смысле Парето, если $W_i(x) \geq W_i(x')$, $i = \overline{1, s}$, $W(x) \neq W(x')$. Обозначение: $x \succ x'$.

Пусть $X = \{x^1, \dots, x^n\}$ – конечное множество стратегий, Π – множество попарно несравнимых стратегий. Приведем алгоритм поиска Π .

Шаг 1. $\Pi = \{x^1\}$

...

Шаг k . $\Pi = \{x^1, \dots, x^{i_k}\}$, $t \leq k$

Шаг $k+1$. Выбираем стратегию x^{k+1} и сравниваем её со стратегиями из множества Π .

а) $\exists x' \in \Pi: x' \pm x^{k+1}$;

б) $\exists x' \in \Pi: x^{k+1} \pm x'$, тогда уничтожаем в множестве Π стратегии, хуже x^{k+1} ,

получаем множество Π' . Полагаем после этого, что $\Pi = \Pi' \cup \{x^{k+1}\}$. Почему это

множество содержит попарно несравнимые стратегии? Предположим, это не так, тогда:

$\exists x \in \Pi': x \pm x^{k+1} \pm x'$ и, в силу транзитивности, $x \pm x'$, что есть противоречие, т.к.

$x, x' \in \Pi$.

с) x^{k+1} не сравнима ни с какими стратегиями из множества Π , тогда $\Pi := \Pi \cup \{x^{k+1}\}$.

...

Упр. Показать, что после n -ого шага $\Pi = P(X, W)$.

Добавим, что этот алгоритм эффективен в том смысле, что не все возможные пары сравниваются.

Аналогичный алгоритм можно предложить и для нахождения множества стратегий, оптимальных по Слейтеру. Для этого достаточно заменить $\succeq$ на $\succ$.

Пусть $X \subset E^m$ – выпуклый компакт в евклидовом пространстве.

Опр. Будем говорить, что вектор $\alpha \in E^m$ задает в точке $x^0 \in X$ допустимое или возможное направление, если $\exists \varepsilon_0 > 0: \forall 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0 (x^0 + \varepsilon \alpha) \in X$.

Рассмотрим *пример* (рис. 48).

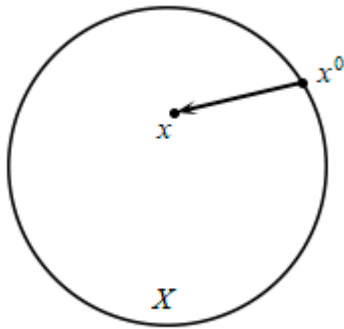


Рис 48.

Пусть $\alpha = x - x^0$. По определению выпуклого компакта,

$$(\varepsilon x + (1 - \varepsilon)x^0) \in X, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1$$

$$\left(x^0 + \varepsilon \overbrace{(x - x^0)}^{\alpha} \right) \in X, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1$$

Тогда при $\varepsilon_0 = 1$ выполнено условие определения допустимого направления.

Будем использовать обозначение $L(x^0)$ – множество всех направлений в точке x^0 .

Теорема 3.3. Пусть все частные критерии $W_i(x)$, $i = \overline{1, s}$ – вогнуты на компакте X евклидового пространства и непрерывно дифференцируемые в некоторой области D .

Тогда $x^0 \notin S(X, W) \Leftrightarrow \exists \alpha \in L(x^0): (W'_i(x^0), \alpha) > 0, \quad i = \overline{1, s}. \quad (1)$

Доказательство:

1) $x^0 \notin S(X, W) \Rightarrow (1)$

$\exists x: W_i(x) > W_i(x^0), \quad i = \overline{1, s}$

$$(W'_i(x^0), x - x^0) \geq W_i(x) - W_i(x^0) > 0, \quad i = \overline{1, s}^{45}$$

Осталось указать направление, допустимость которого мы уже показали: $\alpha = x - x^0$.

2) Пусть для $x^0 \in X$ выполнено $(1) \Rightarrow x^0 \notin S(X, W)$

По определению допустимого направления,

$\exists \varepsilon_0 > 0: \forall 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0 \quad (x^0 + \varepsilon \alpha) \in X$

$$W_i(x^0 + \varepsilon \alpha) - W_i(x^0) =^{46} \left(W'_i \left(x^0 + \begin{smallmatrix} 0 \leq \theta_i \leq 1 \\ \theta_i \end{smallmatrix} \varepsilon \alpha \right), \varepsilon \alpha \right) = \varepsilon \left(W'_i \left(x^0 + \begin{smallmatrix} 0 \leq \theta_i \leq 1 \\ \theta_i \end{smallmatrix} \varepsilon \alpha \right), \alpha \right)$$

$(W'_i(x^0 + \theta_i \varepsilon \alpha), \alpha) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} (W'_i(x^0), \alpha) > 0, \quad i = \overline{1, s}, \text{ т.е. при малых } \varepsilon$

$$\varepsilon \left(\underbrace{W'_i(x^0 + \theta_i \varepsilon \alpha)}_{>0}, \alpha \right) > 0$$

Таким образом, мы получили, что $x^0 + \varepsilon \alpha \succ x^0$, и теорема доказана.

Рассмотрим частный случай.

Пусть все частные критерии $W_i(x)$, $i = \overline{1, s}$ – строго вогнуты на выпуклом компакте X .

Покажем, что $P(X, W) = S(X, W)$.

Нам уже известно, что $P(X, W) \subset S(X, W)$. Покажем, что строгого включения быть не может. Предположим противное:

⁴⁵ Известное неравенство, являющееся алгебраической реализацией факта, что касательная в некоторой точке вогнутой функции лежит выше этой функции.

⁴⁶ Формула конечных приращений Лагранжа.

$$\exists x' \in S(X, W) \setminus P(X, W) \Rightarrow \exists x: W_i(x) \geq W_i(x'), \quad i = \overline{1, s}, \quad W(x) \neq W(x')$$

Рассмотрим $\frac{x+x'}{2} \in X$.

$$W_i\left(\frac{x+x'}{2}\right) > \frac{1}{2} \overbrace{W_i(x)}^{\geq W_i(x')} + \frac{1}{2} W_i(x') \geq W_i(x'), \quad i = \overline{1, s}, \text{ то есть,}$$

$\frac{x+x'}{2} \succ x' \in S(X, W)$. Получили противоречие.

Пример.

Пусть даны $x^1, \dots, x^s$ – точки на плоскости. Определим критерий расстояния для некоторой точки x :

$$W_i(x) = -|x - x^i|, \quad i = \overline{1, s}$$

$$W_i'(x) = -\frac{(x - x^i)}{|x - x^i|} = \frac{x^i - x}{|x - x^i|}, \quad i = \overline{1, s} \text{ – градиент в точке } x.$$

Решим задачу для двух точек x^1, x^2 .

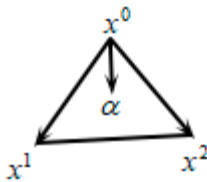


Рис 49.

x^0 не является оптимальной по Слейтеру, если существует направление α , образующее острые углы с векторами $\overrightarrow{x^0 x^1}$, $\overrightarrow{x^0 x^2}$ (см. рис. 49). Нетрудно показать, что такое направление найдется для всех x^0 вне отрезка $[x^1, x^2]$. Все точки этого отрезка, очевидно, оптимальны по Слейтеру, т.к. хотя бы один угол между векторами будет неострый.

Упр. Попробуйте решить задачу для трех точек x^1, x^2, x^3 .

Общая задача принятия решений

Как и прежде, ЛПР выбирает стратегию $x \in X$.

Опр. Бинарным отношением R на множестве X называется $R \subset X \times X$. Если пара $(x, x') \in R$, то будем говорить, что стратегия x лучше (или не хуже) стратегии x' .

Вместо записи $(x, x') \in R$ будем использовать xRx' , а вместо $(x, x') \notin R$ — $x\bar{R}x'$.

Опр. Бинарное отношение R на множестве X называется:

- 1) рефлексивным, если $xRx \quad \forall x \in X$; $(\geq)$
- 2) антирефлексивным, если $x\bar{R}x \quad \forall x \in X$; $(>)$
- 3) симметричным, если $xRy \Rightarrow yRx \quad \forall x, y \in X$; $(=)$
- 4) асимметричным, если $xRy \Rightarrow y\bar{R}x \quad \forall x, y \in X$;
- 5) транзитивным, если $xRy, yRz \Rightarrow xRz \quad \forall x, y, z \in X$;
- 6) ациклическим, если $\nexists x^1, \dots, x^k \in X : x^1Rx^2 \dots Rx^kRx^1$.

Утв. Из асимметричности следует антирефлексивность, т.к., если отношение не антирефлексивно, то $\exists x : xRx \Rightarrow x\bar{R}x$, что абсурдно.

Утв. Из ациклическости следует асимметричность, т.к., если отношение не асимметрично, то $\exists x, y : xRyRx$, что есть цикл.

Пример. Сравнение стратегий по векторному критерию в смысле Парето $\succeq (\succ)$

является транзитивным асимметричным бинарным отношением.

Упр. Докажите, что из антирефлексивности и транзитивности бинарного отношения R следует его ациклическость.

Опр. Ядром бинарного отношения R на множестве X называется

$$C(X, R) = \{x' \in X \mid xRx' \Rightarrow x'Rx\} \quad (1)$$

Опр. Ядром асимметричного бинарного отношения R на множестве X называется

$$C(X, R) = \{x' \in X \mid \exists x \in X : xRx'\} \quad (2)$$

Покажем, что для асимметричных бинарных отношений множества (1) и (2) совпадают:

$$1) \quad x' \in (1) \Rightarrow x' \in (2)$$

$$x' \notin (2) \Rightarrow \exists x \in X : xRx' \begin{cases} \xRightarrow{\text{асимм.}} x' \bar{R}x \\ \xRightarrow{(1)} x'R x \end{cases}$$

$$2) \quad x' \in (2) \Rightarrow x' \in (1)$$

$$x' \in (2) \Rightarrow \exists xRx' \Rightarrow \text{верна импликация } xRx' \Rightarrow x'R x$$

Примеры.

1. Пусть $R = '\succeq'$ – асимметричное бинарное отношение, тогда $C(X, R) = P(X, W)$.

2. Пусть $R = '>'$ – асимметричное бинарное отношение, тогда $C(X, R) = S(X, W)$.

3. Изоморфизм бинарных отношений и орграфов.

Пусть $X = \{x^1, \dots, x^n\}$ – конечное множество. Тогда, соединяя стрелкой некоторые $x^i, x^j : x^i R x^j$, получим ориентированный граф.

Задача. Рассмотрим стратегии x^1, x^2, x^3 (см. рис. 50). Найдем ядро бинарного отношения. Поскольку $x^1 R x^2 R x^1$, отношение не антисимметрично.

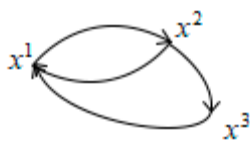


Рис 50.

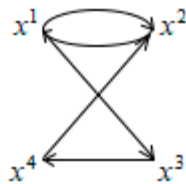


Рис 51.

$$\begin{cases} x^1 \notin C(X, R) \\ x^2 \in C(X, R) \\ x^3 \notin C(X, R) \end{cases} \Rightarrow C(X, R) = \{x^2\}$$

Упр. Попробуйте решить задачу для четырех стратегий, рисунок 51.

Утв. Пусть X – конечно, а бинарное отношение R – ациклично. Тогда $C(X, R) \neq \emptyset$.

Докажите его самостоятельно.

Пример. Приведем таблицу оценок двух школьников.

	Математика	Литература
x^1	3	5
x^2	5	4

Очевидно, эти две стратегии несравнимы в смысле Парето. Попробуем сравнить их, используя дополнительную информацию о важности предметов. Рассмотрим некоторые случаи.

1. Математика равноценна литературе.

Введем третьего гипотетического ученика со следующими оценками:

	Математика	Литература
x^1	3	5
x^2	5	4
x^3	4	5

Справедливо, что $x^2 \sqcup x^3 \succeq x^1 \Rightarrow x^2 \succeq x^1$.

2. Математика «лучше» литературы.

	Математика	Литература
x^1	3	5
x^2	5	4
x^3	4	5

Справедливо, что $x^2 \succeq x^3 \succeq x^1 \Rightarrow x^2 \succeq x^1$.

Очевидно, литература лучше математики быть не может, т.к. x^2, x^1 в этом случае будут несравнимы.

Опр. Частные критерии $W_i(x)$, $W_j(x)$ – однородны, если их диапазоны изменений совпадают:

$$\max_{x \in X} W_i(x) = \max_{x \in X} W_j(x) ;$$

$$\min_{x \in X} W_i(x) = \min_{x \in X} W_j(x) .$$

Неоднородные критерии можно сделать однородными, преобразовав $W_j(x)$ и найдя соответствующие коэффициенты:

$$W_j(x) \rightarrow \alpha W_j(x) + \beta$$

Учитывая это обстоятельство, будем считать в дальнейшем все критерии однородными.

Лекция XIV

Сравнительная важность критериев

Формализуем информацию о сравнительной важности или равносильности критериев.

Пусть $I = \{1, \dots, s\}$ – множество номеров критериев, на котором мы задаем бинарные отношения. Введем некоторые из них.

Отношение равноценности A_1 : $rA_1t \Rightarrow W_r(x)$ и $W_t(x)$ – равноценны.

A_1 – отношение эквивалентности⁴⁷.

Отношение сравнительной важности A_2 : $rA_2t \Rightarrow W_r(x)$ важнее $W_t(x)$.

A_2 – асимметрично⁴⁸, транзитивно.

Отношение транзитивного замыкания

φ : $r\varphi t \Rightarrow \exists rB_1i_1 \dots i_{k-1}B_kt$, $B_l = \{A_1 \text{ либо } A_2\}$, причём A_2 встречается хотя бы единожды.

φ – антирефлексивно.

Последнее отношение позволяет получать непротиворечивую информацию от ЛППР.

Рассмотрим евклидово пространство E^s с векторными оценками

$y = W(x)$, $y \in Y = W(X)$. Определим на этом пространстве бинарные отношения.

Отношение сравнения по Парето P : $yPy' \Leftrightarrow y_i \geq y'_i$, $i = \overline{1, s}$, $y \neq y'$.

Введем обозначение y^{rt} – векторная оценка y , в которой r -ая и t -ая компоненты поменяны местами.

Пусть выполнено rA_1t , то есть r и t – равноценны. Тогда

⁴⁷ Т.е. рефлексивно, симметрично и транзитивно.

⁴⁸ И антирефлексивно в соответствии с утверждением из предыдущей лекции.

$$S_{rt} : yS_{rt}y' \Leftrightarrow y' = y^{rt}$$

Пусть выполнено rA_2t , то есть r -ый критерий важнее t -ого. Тогда

$$T_{rt} : yT_{rt}y' \Leftrightarrow y' = y^{rt}, y_r > y_t$$

Опр. Будем говорить, что две векторных оценки y и y' связаны (зом)бинарным отношением R тогда и только тогда, когда

$$\exists yH_1z^1H_2z^2 \dots z^{k-1}H_ky', H_i \in \{P, S_{rt} : rA_1t, T_{rt} : rA_2t\} \text{ и } \exists H_l = P \text{ или } T_{rt}$$

Лемма 1. Введенное бинарное отношение R – транзитивно и ациклично.

Доказательство:

1) Транзитивность: $yRy'Ry'' \Rightarrow yRy''$.

Используя определение отношения R , построим две цепочки:

$$yH_1z^1H_2z^2 \dots z^{k-1}H_ky'$$

$$y'H_{k+1}z^{k+1}H_{k+2}z^{k+2} \dots z^{k+q-1}H_{k+q}y''$$

Объединяя их, получим искомое:

$$yH_1z^1H_2z^2 \dots z^{k-1}H_ky'H_{k+1}z^{k+1}H_{k+2}z^{k+2} \dots z^{k+q-1}H_{k+q}y'' \Rightarrow yRy''$$

2) Ацикличность, от противного: пусть $\exists yH_1z^1H_2z^2 \dots z^{k-1}H_ky$. Тогда рассмотрим два случая:

а) $\exists l : H_l = P$

$$z^{l-1}pz^l \Rightarrow \sum_{i=1}^s z_i^{l-1} > \sum_{i=1}^s z_i^l$$

$$H_l = T_{rt}, S_{rt} \Rightarrow \sum_{i=1}^s z_i^{l-1} = \sum_{i=1}^s z_i^l$$

$$\sum_{i=1}^s y_i \geq \sum_{i=1}^s z_i^1 \geq \dots \geq \sum_{i=1}^s y_i, \text{ что есть противоречие.}$$

б) $\forall i H_i \neq P$

Без ограничения общности считаем, что $H_1 = T_{rt}$

$$H_l = S_{i_l j_l} \text{ или } T_{i_l j_l}$$

Определим множество $I_+ = \{ i \mid i\varphi t \}$.

$$r \in I_+, \text{ т.к. } T_{rt} \Rightarrow rA_2 t \Rightarrow r\varphi t$$

$t \notin I_+$, т.к. если бы оно принадлежало, то было бы выполнено $t\varphi t$, что неверно в силу антирефлексивности φ .

Покажем, что $j_l \in I_+ \Rightarrow i_l \in I_+$.

$$i_l A_1 j_l \varphi t \Rightarrow i_l \varphi t$$

Ввиду этой импликации, возможны три случая:

$$(1) \text{ и } (2): \left. \begin{array}{l} i_l, j_l \in I_+ \\ i_l, j_l \notin I_+ \end{array} \right\} H_l = S_{i_l j_l} \text{ или } T_{i_l j_l} \Rightarrow z^{l-1} H_l z^l \Rightarrow \sum_{i \in I_+} z_i^{l-1} = \sum_{i \in I_+} z_i^l$$

$$(3): i_l \in I_+, j_l \notin I_+ \Rightarrow i_l A_2 j_l, \text{ т.к. если бы } i_l A_1 j_l, \text{ то } j_l A_1 i_l \varphi t \Rightarrow j_l \in I_+$$

$$\text{Итак, } i_l A_2 j_l \Rightarrow H_l = T_{i_l j_l} \Rightarrow z_{i_l}^{l-1} > z_{j_l}^{l-1} \Rightarrow \sum_{i \in I_+} z_i^{l-1} > \sum_{i \in I_+} z_i^l.$$

$$\sum_{i \in I_+} y_i > \sum_{i \in I_+} z_i^1 \geq \dots \geq \sum_{i \in I_+} y_i, \text{ что есть противоречие.}$$

Лемма доказана.

Пусть $P(X, W) = \{x_1, \dots, x_n\}$ – конечное множество стратегий, оптимальных по Парето.

Рассмотрим $P(Y) = \{y_1 = W(x_1), \dots, y_n = W(x_n)\}$ – соответствующее множество

векторных оценок. Наша задача состоит в том, чтобы сузить множество $P(Y)$, т.е.

построить $C(P(Y), R) \neq \emptyset$ ⁴⁹ – ядро на множестве векторных оценок $P(Y)$ бинарного отношения R .

Предположим, что все частные критерии равноценны, т.е. $A_1 = I \times I$, $A_2 = \emptyset$.

⁴⁹ По ранее доказанному утверждению.

Определим отображение:

$$y \in E^s \quad \theta(y) = (\theta_1(y), \dots, \theta_s(y)), \quad \theta_1(y) \geq \theta_2(y) \geq \dots \geq \theta_s(y)$$

Лемма 2. Пусть yPy' . Тогда $[\theta(y)]P[\theta(y')]$ ⁵⁰.

Доказательство:

$$\theta_1(y) = \max_{1 \leq i \leq s} y_i \geq \max_{1 \leq i \leq s} y'_i = \theta_1(y')$$

Покажем, что $\theta_i(y) \geq \theta_i(y')$, $i = \overline{1, s}$, то есть, что $\theta(y) \neq \theta(y')$. Пусть

$$\exists k: \theta_k(y) < \theta_k(y')$$

$$\underbrace{\overset{y'_{i_s}}{\square} \dots \overset{y'_{i_k}}{\square} \theta_s(y) \leq \dots \leq \theta_k(y)}_{s-k+1 \text{ компонент}} < \underbrace{\theta_k(y') \leq \theta_{k-1}(y') \leq \dots \leq \theta_1(y')}_{k \text{ компонент}} \Rightarrow$$

всего компонент $s - k + 1 + k = s + 1 > s$. Пришли к противоречию.

Утв. Если $A_1 = I \times I$, то $yPy' \Leftrightarrow [\theta(y)]P[\theta(y')]$.

Доказательство:

$$1) \quad yPy' \Rightarrow [\theta(y)]P[\theta(y')]$$

$$yPy' \Leftrightarrow \exists yH_1z^1H_2z^2 \dots z^{k-1}H_ky', \quad H_i \neq T_{rt}, \text{ т.е. } \exists l: H_l = P$$

Если $H_l = S_{i_l j_l}$, то z^{l-1} и z^l имеют одинаковые компоненты, просто переставленные

местами. Поэтому совпадают упорядоченные оценки: $\theta(z^{l-1}) = \theta(z^l)$.

$$\text{Если } H_l = P, \text{ то } z^{l-1}pz^l \xrightarrow{Л2} [\theta(z^{l-1})]P[\theta(z^l)]$$

$$2) \quad yPy' \Leftarrow [\theta(y)]P[\theta(y')]$$

Хорошо известно, что упорядочить компоненты можно при помощи простой перестановки пар:

⁵⁰ Квадратные скобки в данном случае – просто инструмент выделения.

$$y_{S_{i_1 j_1} \dots S_{i_k j_k} [\theta(y)] P[\theta(y')] S_{i_{k+1} j_{k+1}} \dots y'}$$

Таким образом, утверждение доказано.

Примеры.

1. Построить ядро бинарного отношения для следующих векторов:

$$y^1 = (3, 5, 3) \Rightarrow \theta(y^1) = (5, 3, 3)$$

$$y^2 = (4, 4, 3) \Rightarrow \theta(y^2) = (4, 4, 3)$$

$$y^3 = (5, 3, 2) \Rightarrow \theta(y^3) = (5, 3, 2)$$

$$y^4 = (2, 3, 5) \Rightarrow \theta(y^4) = (5, 3, 2)$$

$$y^5 = (4, 2, 4) \Rightarrow \theta(y^5) = (4, 4, 2)$$

Сравним оценки:

$$[\theta(y^1)] P[\theta(y^3)], [\theta(y^4)]$$

$$[\theta(y^2)] P[\theta(y^5)]$$

Легко видеть, что y^1 и y^2 – несравнимы и $C(P(Y), R) = \{y^1, y^2\}$.

$$2. P(X, W) = \{x^1, x^2, x^3, x^4\}$$

$$y^1 = (5, 5, 4, 4)$$

$$y^2 = (5, 4, 5, 4)$$

$$y^3 = (5, 4, 4, 5)$$

$$y^4 = (4, 4, 5, 5)$$

$$A_1 = \{(1, 3), (3, 1)\} \cup \{(i, i), i = \overline{1, 4}\}$$

$$A_2 = \{(2, 4), (2, 3)\}$$

Заметим, что:

$$y^1 T_{24} y^3 \Rightarrow y^1 R y^3$$

$$y^1 T_{23} y^2 \Rightarrow y^1 R y^2$$

$$y^1 T_{24} y^3 S_{13} y^4 \Rightarrow y^1 R y^4$$

$C(P(Y), R) = \{y^1\}$, т.е. первый ученик самый лучший.

Математическая модель операции

(осторожно, беспредельное количество определений!)

Опр. Операция – совокупность мероприятий, направленных на достижение некоторой цели.

Опр. Оперирующая сторона – совокупность лиц (либо одно лицо), стремящихся(-еся) в операции к поставленной цели.

Опр. Исследователь операции – участник оперирующей стороны, создающий и исследующий математическую модель операции, а также дающий рекомендации по тому, как нужно действовать в данной операции.

Опр. Для достижения цели оперирующая сторона использует активные средства(ресурсы).

Опр. Контролируемый фактор – величины, значения которых определяются действиями оперирующей стороны. Обозначение: $x \in M_0$ ⁵¹.

Опр. Неконтролируемый фактор – величины, влияющие на исход операции, но не подконтрольные оперирующей стороне. Они подразделяются на неопределенные и случайные факторы.

Опр. Неопределенный фактор – неконтролируемый фактор, про который известна лишь его область значений. Обозначение: $y \in N \subset N_0$, где N – область неопределенности.

Неопределенные факторы делятся, в свою очередь, на три группы:

⁵¹ Так их обозначает Ю. Б. Гермейер.

- 1) субъекты, имеющие собственные интересы;
- 2) природные неопределенности;
- 3) неясность цели (пример: неопределенный фактор i в $W_i(x)$, $i = \overline{1, s}$).

Опр. Случайный фактор – неконтролируемый фактор, которые являются случайными величинами. Обозначение: $z \in Z$ с законом распределения $\theta(z) \in \Theta$.

1) $\theta = \{\theta_\alpha, \alpha \in A\}$

2) $\theta = \left\{ \theta \mid \underline{a}_i \leq \int_Z a_i(z) d\theta(z) \leq \overline{a}_i, i = \overline{1, l} \right\}$

Будем считать, что после окончания операции известны значения

$$(x, y, z) \in M_0 \times N \times Z$$

Опр. Зададим степень соответствия исхода операции поставленной цели функцией

$F(x, y, z)$, которую назовем критерием эффективности.

Лекция XV

Опр. Информационная гипотеза – точное описание того, в какие моменты и какая информация о неконтролируемых факторах поступает оперирующей стороне.

Опр. Стратегия – выбор контролируемых факторов в зависимости от поступающей информации о неконтролируемых факторах. Формально, это функция $x: N \times Z \rightarrow M_0$.

Примеры.

1. Никакой дополнительной информации не ожидается:

$$x = x \in M_0, \quad M = M_0$$

2. В момент начала операции⁵² y становится известным:

$$y \in N \quad x: N \rightarrow M_0, \text{ обозначим } M_u \text{ множество таких функций.}$$

3. В момент начала операции известна информация и об y , и о z :

$$y, z \in N \times Z \quad x: N \times Z \rightarrow M_0, \text{ обозначим } M \text{ множество таких функций.}$$

4. Для некоторого вектора $y = (y_1, \dots, y_n)$ известна только сумма $\sum_{j=1}^n y_j$:

$$x(y) = f\left(\sum_{j=1}^n y_j\right), \text{ причем множество таких функций } M: M_0 \subset M \subset M_u$$

Оптимальные стратегии в операции

Рассмотрим подход Гермейера, основанный на т.н. принципе гарантированного результата.

Для стратегии $x \in M$ определим оценку эффективности $W(x)$ – гарантированную величину значения критерия.

Примеры.

⁵² После момента исследования!

1. Вспомним игру Γ_1 , где первый игрок сообщал второму стратегию x , второй выбирал стратегию из множества лучших ответов $y \in Y(x) = \underset{y \in Y}{\operatorname{Argmax}} G(x, y)$, при этом $W(x) = \min_{y \in Y(x)} F(x, y)$. Важно отметить, что принцип гарантированного результата здесь не исключает риск, так как второй игрок обязательно будет выбирать стратегию из множества $Y(x)$.
2. Более тривиальный пример: игрок, в зависимости от прогноза погоды, решает, взять ему с собой на улицу зонтик или нет. Понятно, что риск здесь также присутствует, потому что прогноз погоды может оказаться неверным.

Опр. Стратегия $x^0 \in M$ называется оптимальной, если справедливо:

$$W(x^0) = \max_{x \in M} W(x) = F_2(M)^{53}$$

Пример.

У инвестора есть k акций, которые он желает продать. Торги происходят в течение $i = 1, \dots, n > k$ дней. В i -ый день стоимость акций равна y_i , $i = \overline{1, n}$. Его контролируемые факторы:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{акция продана,} \\ 0, & \text{акция не продана,} \end{cases}$$

$x_i(y_i)$ – сама стратегия.

Предположим, что y_i – неопределенные факторы, такие, что:

$$N = \left\{ y_i \mid a \leq y_i \leq b, \quad i = \overline{1, n} \right\}$$

$$M_0 = \left\{ x \mid \sum_{i=1}^n x_i = k, \quad x_i = \{0, 1\} \right\}$$

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i - \text{выручка}$$

⁵³ Если максимум не достигается, то можно ввести понятие ε -оптимальной стратегии (см. лекцию XI)

$$\min_{y \in N} F(x, y) = k \cdot a$$

Рассмотрим другой критерий:

$$F_1(x, y) = \frac{F(x, y)}{\max_{x \in M_0} F(x, y)} \leq 1,$$

то есть сумма, которую получает инвестор сравнивается с той суммой, которую бы получил инвестор, если бы знал все цены.

Оценки эффективности для чистых стратегий

Выпишем явную форму для оценки эффективности стратегий. Для этого сделаем некоторые предположения:

- 1) $y \in N$ – либо природная неопределенность, либо стратегия противника
- $F_n(x, y, z) = -F(x, y, z)$, имеющего противоположные интересы;
- 2) противник не знает реализацию случайной величины z ;
- 3) оперирующая сторона разрешает осреднение критерия по случайности (по закону распределения θ).

В таком случае формула для оценки эффективности записывается так:

$$W(x) = \inf_{y \in N} \inf_{\theta \in \Theta} \int_Z F(x(y, z), y, z) d\theta(z) \quad (1)$$

Если бы противник знал реализацию z , то формула изменилась бы так:

$$W'(x) = \inf_{\theta \in \Theta} \int_Z \inf_{y \in N} F(x(y, z), y, z) d\theta(z)$$

Покажем, что $W(x) \geq W'(x)$, т.е. что если противник знает больше, то оценка эффективности уменьшается:

$$\forall y \in N \quad \forall \theta \in \Theta \quad \int_Z F(x(y, z), y, z) d\theta(z) \geq \int_Z \inf_{y \in N} F(x(y, z), y, z) d\theta(z)$$

Беря нижнюю грань по $\theta \in \Theta$ от обеих частей неравенства, получаем искомое.

Оценки эффективности для смешанных стратегий

Предположим, что $M = M_0$, $F_z(M_0)$ – наилучший гарантированный результат.

Опр. Смешанной стратегией φ на множестве M_0 называется вероятностное распределение на этом множестве.

$$W(\varphi) = \inf_{y \in N} \inf_{\theta \in \Theta} \int_Z \int_{M_0} F(x, y, z) d\varphi(x) d\theta(z) \quad (2)$$

Если противник знает реализацию z , то:

$$W'(\varphi) = \inf_{\theta \in \Theta} \int_Z \inf_{y \in N} \int_{M_0} F(x, y, z) d\varphi(x) d\theta(z)$$

Упр. Пусть $y = (y_1, y_2) \in N = N_1 \times N_2$, где y_1 – природная неопределенность, y_2 – стратегия противника, знающего z . Выпишите в этих условиях $W(x)$.

Абсолютно оптимальная стратегия

Оптимальная стратегия $x^0 \in M$ определяется как $W(x^0) = \max_{x \in M} W(x)$, при этом оценка эффективности соответствует (1).

Допустим, что закон распределения случайного фактора θ известен. Определим осредненный критерий:

$$x: N \times Z \rightarrow M_0$$

$$\bar{F}(x, y, \theta) = \int_Z F(x(y, z), y, z) d\theta(z)$$

$$W(x) = \inf_{y \in N} \bar{F}(x, y, \theta) \quad (1)$$

Опр. Абсолютно оптимальной стратегией $x_a \in M$ называется

$$\bar{F}(x_a, y, \theta) = \max_{x \in M} \bar{F}(x, y, \theta) \quad \forall y \in N$$

Положим, что $M_0 \subseteq M \subseteq M_u$. Тогда

$$\max_{x \in M} \bar{F}(x, y, \theta) = \max_{x \in M_0} \bar{F}(x, y, \theta) \quad (3)$$

$$\forall x \in M \quad \bar{F}(x, y, \theta) = \bar{F}(x(y), y, \theta) \leq \max_{x \in M_0} \bar{F}(x, y, \theta) \leq \max_{x \in M} \bar{F}(x, y, \theta) \Rightarrow$$

$$\max_{x \in M} \bar{F}(x, y, \theta) = \bar{F}(x(y), y, \theta) \leq \max_{x \in M_0} \bar{F}(x, y, \theta) \leq \max_{x \in M} \bar{F}(x, y, \theta)$$

Очевидно, здесь можно неравенство заменить на равенство и (3) обосновано.

Равенство (3), вообще говоря, может быть не выполнено для $M \not\subseteq M_u$. Рассмотрим

пример.

$$F(x, z) = -(x - z)^2, \quad M_0 = [0, 1], \quad Z = [0, 1]$$

$$x: Z \rightarrow M_0$$

$$\max_{0 \leq x \leq 1} \left[-\int_0^1 (x - z)^2 dz \right] < 0 = \max_{x \in M} \left[-\int_0^1 (x(z) - z)^2 dz \right]$$

Теорема 3.4. Пусть $\exists x_a \in M$. Тогда x_a – оптимальная стратегия и

$$F_2(M) = \inf_{y \in N} \max_{x \in M} \bar{F}(x, y, \theta) \quad (4)$$

Доказательство:

$$\forall x \in M \quad W(x) = \inf_{y \in N} \bar{F}(x, y, \theta) \leq \inf_{y \in N} \max_{x \in M} \bar{F}(x, y, \theta) = \inf_{y \in N} \bar{F}(x_a, y, \theta) = W(x_a)$$

Рассмотрим частные случаи.

Теорема 3.5.

1) Если $\forall y \in N$ достигается $\max_{x \in M_0} \bar{F}(x, y, \theta)$, то

$$F_2(M_u) = \inf_{y \in N} \max_{x \in M_0} \bar{F}(x, y, \theta). \quad (5)$$

2) Если $\forall y \in N, \forall z \in Z$ достигается $\max_{x \in M_0} F(x, y, \theta)$, то

$$F_2(M) = \inf_{y \in N} \int_Z \max_{x \in M_0} F(x, y, z) d\theta(z). \quad (6)$$

Доказательство:

$$1) \quad x_a : x_a(y) : \bar{F}(x_a(y), y, \theta) = \max_{x \in M_0} \bar{F}(x, y, \theta) \stackrel{(3)}{=} \max_{x \in M_u} \bar{F}(x, y, \theta), \quad \forall y \in N$$

Мы получили, что стратегия x_a – абсолютно оптимальна, а значит, по **T3.4**,

$$F_z(M_u) = \inf_{y \in N} \max_{x \in M_u} \bar{F}(x, y, \theta) \stackrel{(3)}{=} \inf_{y \in N} \max_{x \in M_0} \bar{F}(x, y, \theta)$$

$$2) \quad x_a : x_a(y, z) : F(x_a(y, z), y, z) = \max_{x \in M_0} F(x, y, z), \quad \forall y \in N, \quad \forall z \in Z$$

Стратегия x_a будет абсолютно оптимальной, если мы докажем, что

$$\bar{F}(x_a, y, \theta) = \max_{x \in M} \bar{F}(x, y, \theta) = \int_Z \max_{x \in M_0} F(x, y, z) d\theta(z) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \forall x \in M \quad \bar{F}(x, y, \theta) &= \int_Z F(x(y, z), y, z) d\theta(z) \leq \int_Z \max_{x \in M_0} F(x, y, z) d\theta(z) = \\ &= \int_Z F(x_a(y, z), y, z) d\theta(z) = \bar{F}(x_a, y, \theta), \quad \forall y \in N \end{aligned}$$

Применяя теперь **T3.4**, получим:

$$F_z(M) \stackrel{(4)}{=} \inf_{y \in N} \max_{x \in M} \bar{F}(x, y, \theta) \stackrel{(7)}{=} \inf_{y \in N} \int_Z \max_{x \in M_0} F(x, y, z) d\theta(z) \text{ и теорема доказана.}$$

Пример.

$$i \in M_0 = \{1, 2, 3\}, \quad j \in N = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$(F(i, j))_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a) \quad M = M_0, \quad F_z(M_0) = \max_{1 \leq i \leq 3} \min_{1 \leq j \leq 4} F(i, j) = 1, \quad i_0 = 3$$

В множестве M_0 нет абсолютно оптимальных стратегий. В самом деле, если бы она была:

$$i_a : F(i_a, j) = \max_{1 \leq i \leq 3} F(i, j), \quad j = \overline{1, 4}, \text{ т.е.}$$

$$F(i_a, j) \geq F(i, j), \quad i = \overline{1, 3}, \quad j = \overline{1, 4}$$

У нас нет такой строки i_a , которая доминировала бы остальные строки.

b) $M = M_u$, т.е. ожидается полная информация о неопределенном факторе j

$\tilde{i}: N \rightarrow M_0$, коих будет в данном примере – 3^4 .

По T3.5, $F_c(M_u) = \min_{1 \leq j \leq 4} \max_{1 \leq i \leq 3} F(i, j) = 2$

$$i^0: W(i^0) = \min_{1 \leq j \leq 4} F(i^0(j), j) = 2$$

$$F(i^0(j), j) \geq 2, \quad j = \overline{1, 4}$$

$$i^0(1) = 2, 3$$

$$i^0(2) = 1, 2, 3$$

$$i^0(3) = 1, 3$$

$$i^0(4) = 1, 2$$

Всего – 24 оптимальные стратегии.

$$i_a(j): \max_{1 \leq i \leq 3} F(i, j) = F(i_a(j), j)$$

$$i_a(1) = 3$$

$$i_a(2) = 1, 2, 3$$

$$i_a(3) = 1$$

$$i_a(4) = 1, 2$$

Всего – 6 абсолютно оптимальных стратегий.

Лекция XVI

Продолжаем рассматривать *примеры*. Напомним условие.

$$i \in M_0 = \{1, 2, 3\}, \quad j \in N = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$(F(i, j))_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

с) Пусть $N = N_1 \cup N_2$, $N_1 = \{1, 2\}$, $N_2 = \{3, 4\}$. Предположим, что вначале оперирующей стороне будет известно, какому множеству принадлежит $j - N_1$ или N_2 .

$$\tilde{i}: \tilde{i}(j) = \begin{cases} i_1, & j \in N_1 \\ i_2, & j \in N_2 \end{cases}$$

$i_a^1 = 3$, $i_a^2 = 1$ – абсолютно оптимальная стратегия и по **ТЗ.4**

$$F_2(M) = \min_{1 \leq j \leq 4} \max_{1 \leq i \leq 3} F(i, j) = 2$$

$$F(i^0(j), j) \geq 2, \quad j = \overline{1, 4}$$

$$i_1^0 = 2, 3; \quad i_2^0 = 1$$

Необходимое условие оптимальных(максиминных) стратегий

Предположим, что случайный фактор z отсутствует, при этом

$$F(x, y), \quad x \in M = M_0, \quad y \in N,$$

$W(x) = \min_{y \in N} F(x, y)$ – оценка эффективности,

$$x^0: W(x^0) = \max_{x \in M_0} W(x).$$

Пусть $x = (x_1, \dots, x_m) \in E^m$, $h(x)$ – функция многих переменных.

Опр. Производной по направлению $\alpha \in E^m$ называется

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{h(x + \varepsilon \alpha) - h(x)}{\varepsilon} = \frac{dh(x)}{d\alpha} = (h'(x), \alpha)^{54}$$

Пример.

$$x \in E^1, \quad W(x) = \min[x, 1 - x] \quad (\text{рис. ниже})$$

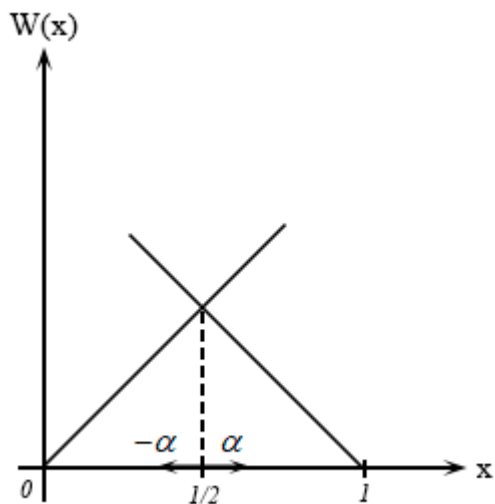


Рис 52.

$$\alpha = (1)$$

$$-\alpha = (-1)$$

$$\frac{dW\left(\frac{1}{2}\right)}{d\alpha} = -1$$

$$\frac{dW\left(\frac{1}{2}\right)}{d(-\alpha)} = -1$$

Теорема 3.6. Пусть $D \in E^m$, N – компакт метрического пространства;

$F(x, y)$, $F'_{x_i}(x, y)$, $i = \overline{1, m}$ – непрерывны на $D \times N$. Тогда

$$\forall x \in D \quad \forall \alpha \in E^m \quad \exists \frac{dW(x)}{d\alpha} = \min_{y \in N(x)} \sum_{i=1}^m \alpha_i F'_{x_i}(x, y), \quad N(x) = \underset{y \in N}{\operatorname{Argmin}} F(x, y) \quad (1)$$

⁵⁴ Последние скобки – скалярное произведение.

Альтернативная запись суммы $-\sum_{i=1}^m \alpha_i F'_{x_i}(x, y) = (\alpha, F'_x(x, y))$, т.е. скалярное произведение α на градиент или, фактически, производная по направлению.

Доказательство: $\forall x \in D \quad \forall \alpha \in E^m$ рассмотрим

$$\varepsilon_k \rightarrow 0+,$$

$$x^k = x + \varepsilon_k \alpha, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$x_i^k = x_i + \varepsilon_k \alpha_i, \quad i = \overline{1, m}$$

Покажем, что существует $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{W(x^k) - W(x)}{\varepsilon_k}$, выражающийся формулой (1).

Рассмотрим последовательность $y_k \in N(x_k)$, $\forall y \in N(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{W(x^k) - W(x)}{\varepsilon_k} &= \frac{F(x^k, y^k) - F(x, y)}{\varepsilon_k} = \frac{\overbrace{F(x^k, y^k) - F(x^k, y)}^{\leq 0} + F(x^k, y) - F(x, y)}{\varepsilon_k} \leq \\ &\leq \frac{F(x^k, y) - F(x, y)}{\varepsilon_k} \stackrel{55}{=} \frac{\sum_{i=1}^m (x_i^k - x_i) F'_{x_i}(x + \theta_k(x_k - x), y)}{\varepsilon_k} = \\ &= \sum_{i=1}^m \alpha_i F'_{x_i}(x + \theta_k(x_k - x), y) \end{aligned}$$

Переходя к пределу, получим:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{W(x^k) - W(x)}{\varepsilon_k} \leq \sum_{i=1}^m \alpha_i F'_{x_i}(x, y) \quad \forall y \in N(x)$$

В силу того, что неравенство выполнено для $\forall y$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{W(x^k) - W(x)}{\varepsilon_k} \leq \min_{y \in N(x)} \sum_{i=1}^m \alpha_i F'_{x_i}(x, y) \quad (2)$$

Доказав аналогичное неравенство для нижнего предела:

⁵⁵ Формула конечных приращений Лагранжа.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{W(x^k) - W(x)}{\varepsilon_k} \geq \min_{y \in N(x)} \sum_{i=1}^m \alpha_i F'_{x_i}(x, y), \quad (3)$$

получим, что нижний предел больше верхнего предела или равен ему, а значит предел последовательности существует и равен выражению из условия теоремы.

Докажем (3). По определению нижнего предела,

$$\exists k_l, l = 1, 2, \dots : \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{W(x^k) - W(x)}{\varepsilon_k} = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{W(x^{k_l}) - W(x)}{\varepsilon_{k_l}}$$

Возьмем $y^{k_l} \in N(x^{k_l})$. Тогда $y^{k_l} \rightarrow y^* \in N(x)$, т.к.

$$F(x^{k_l}, y^{k_l}) \leq F(x^{k_l}, y) \quad \forall y \in N, \text{ и, переходя к пределу при фиксированном } y,$$

$$F(x, y^*) \leq F(x, y)$$

$$\begin{aligned} \frac{W(x^{k_l}) - W(x)}{\varepsilon_{k_l}} &= \frac{F(x^{k_l}, y^{k_l}) - F(x, y^*)}{\varepsilon_{k_l}} = \frac{F(x^{k_l}, y^{k_l}) - F(x, y^{k_l}) + \overbrace{F(x, y^{k_l}) - F(x, y^*)}^{\geq 0}}{\varepsilon_{k_l}} \geq \\ &\geq \frac{F(x^{k_l}, y^{k_l}) - F(x, y^{k_l})}{\varepsilon_{k_l}} = \sum_{i=1}^m \alpha_i F'_{x_i}(x + \theta_{k_l}(x^{k_l} - x), y^{k_l}) \end{aligned}$$

Переходя к пределу, получим:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{W(x^k) - W(x)}{\varepsilon_k} \geq \sum_{i=1}^m \alpha_i F'_{x_i}(x, y^*) \geq \min_{y \in N(x)} \sum_{i=1}^m \alpha_i F'_{x_i}(x, y) \text{ и (3) доказано.}$$

Теорема полностью доказана.

Отметим частный случай.

$$N(x) = \{y(x)\}, \quad F(x, y) \cup_y$$

$$W(x) = F(x, y(x)) - \text{дифференцируема, т.к. } \frac{d}{dx_i} W(x) = F'_{x_i}(x, y(x))$$

Пример.

$$x = (x_1, x_2)$$

$$W = \min_{1 \leq i \leq 3} f_i(x), \quad f_1(x) = x_1^2 + x_2^2, \quad f_2(x) = 3x_2^2, \quad f_3(x) = \cos(\pi x_1) + 3x_2$$

$$x^0 = (1, -1), \quad \alpha = (1, 1)$$

$$\frac{d}{d\alpha} W(x^0) = \min_{j \in N(x^0)} (\alpha, f'_j(x^0))$$

$$f_1(x^0) = 2, \quad f_2(x^0) = 3, \quad f_3(x^0) = -4$$

$$N(x^0) = \{3\}$$

$$f'_3(x^0) = (0, 3) \Rightarrow (\alpha, f'_3(x^0)) = 3 \Rightarrow \frac{d}{d\alpha} W(x^0) = 3$$

Следствие Т3.6. Пусть $M_0 \subset D \in E^m$, при этом $x^0 \in M_0$ – максиминная стратегия и выполнены все условия исходной теоремы. Тогда

$$\sup_{\alpha \in A(x^0)} \min_{y \in N(x^0)} \sum_{i=1}^m \alpha_i F'_{x_i}(x^0, y) \leq 0, \quad (4)$$

$A(x^0)$ – множество всех направлений α , которые допустимы в точке x^0 .

Доказательство:

$$\forall \alpha \in A(x^0) \exists \varepsilon_0 > 0: \forall 0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \quad (x^0 + \varepsilon \alpha) \in M_0 \quad (\text{рис. ниже})$$

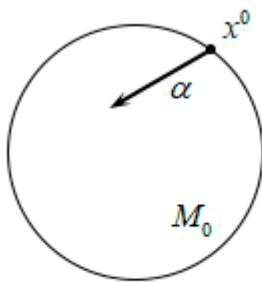


Рис 53.

$$\frac{dW(x^0)}{d\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\overbrace{W(x^0 + \varepsilon \alpha) - W(x^0)}^{\leq 0}}{\varepsilon} \leq 0$$

Из (1) следует, что $\min_{y \in N(x^0)} \sum_{i=1}^m \alpha_i F'_{x_i}(x^0, y) \leq 0 \quad \forall \alpha$, и, ввиду справедливости неравенства для $\forall \alpha$,

$$\sup_{\alpha \in A(x^0)} \min_{y \in N(x^0)} \sum_{i=1}^m \alpha_i F'_{x_i}(x^0, y) \leq 0. \text{ Лемма доказана.}$$

Теорема 3.7. Пусть $M_0 = [a, b] \subset D$, N – компакт метрического пространства;

$F(x, y)$, $F'_x(x, y)$ – непрерывны на $D \times N$. Тогда для максиминной стратегии

$x^0 \in M_0$ справедливо одно из следующих утверждений:

- а) $x^0 = a$ или $x^0 = b$;
- б) $\exists y^1 \neq y^2 \in N(x^0)$;
- в) $N(x^0) = \{y^1\}$, $F'_x(x^0, y^1) = 0$.

Эти условия являются, по сути, обобщением поиска максимума у функции одной переменной на отрезке: он достигается либо в точке, где производная равна 0, либо на краях отрезка.

Доказательство: если выполнено а) или б), то теорема справедлива. Рассмотрим случай, когда а) и б) не выполнено и необходимо выполнение в).

Если не выполнено а), то $a < x^0 < b$.

Если не выполнено б), то $N(x^0) = \{y^1\}$.

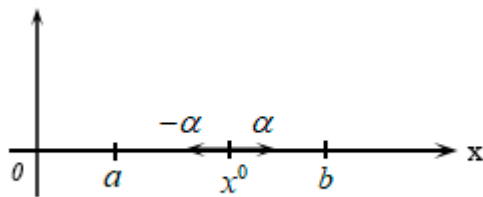


Рис 54.

$$\left. \begin{array}{l} \alpha: 1 \cdot F'_x(x^0, y^1) \leq 0 \\ -\alpha: (-1) \cdot F'_x(x^0, y^1) \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow F'_x(x^0, y^1) = 0$$

Следствие ТЗ.7. Пусть $N = \{y \in E^n \mid c_j \leq y_j \leq d_j\}$, при этом существуют частные производные $F'_{y_j}(x, y)$ на $M \times N$ при всех $j = \overline{1, n}$ и выполнены все условия исходной теоремы. Тогда для максиминной стратегии из отрезка справедливо либо 1), либо 2):

$$1) \exists y^1 \in N(x^0): \begin{cases} F'_x(x^0, y^1)(x^0 - a)(x^0 - b) = 0 \\ F'_{y_j}(x^0, y^1)(y_j^1 - c_j)(y_j^1 - d_j) = 0, \quad j = \overline{1, n} \end{cases}$$

$$2) \exists y^1 \neq y^2 \in N(x^0): \begin{cases} F'_{y_j}(x^0, y^1)(y_j^1 - c_j)(y_j^1 - d_j) = 0, \quad j = \overline{1, n} \\ F'_{y_j}(x^0, y^2)(y_j^2 - c_j)(y_j^2 - d_j) = 0, \quad j = \overline{1, n} \\ F(x^0, y^1) = F(x^0, y^2) \end{cases}$$

Доказательство: по условию ТЗ.7, выполнено одно из условий а), б), в). Покажем, что а) $\vee$ в) $\Rightarrow$ 1)

Первое уравнение системы, очевидно, выполняется.

$$\min_{c_j \leq y_j \leq d_j} F(x^0, y^1 \| y_j) = F(x^0, y^1), \quad y_j = y_j^1$$

F – дифференцируема на отрезке и минимум достигается либо на краях отрезка, либо во внутренней точке, где производная равна нулю.

б) $\Rightarrow$ 2)

Первые два равенства выполнены ввиду аналогичных рассуждений. Последнее также выполнено, так как $F(x^0, y^1) = F(x^0, y^2) = W(x^0)$.

Алгоритм поиска максиминных стратегий

1) Решить систему из $n + 1$ уравнений относительно (x^0, y_j^1) , $j = \overline{1, n}$

2) Решить систему из $2n + 1$ уравнений относительно (x^0, y_j^1, y_j^2) , $j = \overline{1, n}$

Пусть M_0^* , N^* – множества, появляющиеся в результате решений систем 1) и 2). Тогда

$$x^0 \in \max_{x \in M_0^*} \min_{y \in N^*} F(x, y)$$

Пример.

$$F(x, y) = -(x - y + y^3)^2, \quad M_0 = [-1, 1], \quad N = [-1, 1] \quad (\text{рис. 55})$$

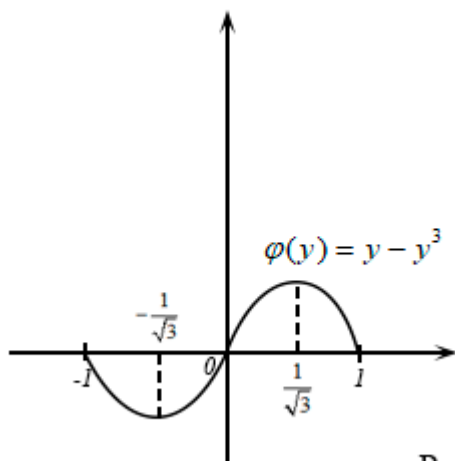


Рис 55.

Мы будем стараться минимизировать отклонение x от функции $\varphi(y) = y - y^3$.

$$N(x) = \begin{cases} \left\{ -\frac{1}{\sqrt{3}} \right\}, & x > 0 \\ \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}, & x = 0 \\ \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}, & x < 0 \end{cases}$$

$$y \in N(x) \quad F'_x(x, y) = -2(x - y + y^3) \neq 0 \Rightarrow M_0^* = \{\pm 1, 0\}, \quad N^* = \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$$

$$(F(x, y))_{x \in M^*, y \in M^*} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 & -\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \\ -\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 & -\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \\ -\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 & -\left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \end{pmatrix} \Rightarrow x^0 = 0$$

Лекция XVII

Некоторые задачи оптимального распределения ресурсов

Пусть имеется $i = \overline{1, n}$ пунктов, по которым оперирующая сторона распределяет ресурс в количестве $A > 0$, $f_i(t)$ – функция эффективности вложения ресурса в i -ый пункт, распределение ресурса задается вектором $x = (x_1, \dots, x_n)$, x_i – количество ресурсов, направляемых в i -ый пункт.

Мы будем рассматривать два типа задач: в одних ресурс будет непрерывным (бесконечно делимым), в других – дискретным (штучным).

$$M_0 = \left\{ x \mid \sum_{i=1}^n x_i = A, x_i \geq 0, i = \overline{1, n} \right\} - \text{для непрерывных задач};$$

$$M'_0 = \left\{ x \in M_0 \mid x_i \in \mathbb{Z}, i = \overline{1, n} \right\} - \text{для дискретных задач}.$$

Рассмотрим первую задачу оптимального распределения ресурсов.

$$\max_{x \in M_0} \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i) = \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^0), \quad (I)$$

т.е. оперирующая сторона пытается максимизировать минимальный эффект отложения по всем пунктам.

Будем считать, что $f_i(t)$ – определена, возрастает и непрерывна на отрезке $[0, A]$,

$$f_1(0) \leq f_2(0) \leq \dots \leq f_n(0), \text{ т.е. первый пункт – слабейший.}$$

Теорема 3.8 (принцип уравнивания).

В сделанных предположениях пусть x^0 является оптимальным распределением ресурса в задаче (I). Тогда необходимо и достаточно, что

$$\exists 1 \leq k \leq n \begin{cases} f_1(x_1^0) = \dots = f_k(x_k^0) < f_{k+1}(0), \\ x_i^0 = 0 \quad \forall i = \overline{k+1, n} \end{cases} \quad (1)$$

При этом, если $f_1(0) = \dots = f_n(0)$, то $k = n$. Оптимальное распределение ресурсов в задаче (I) единственно.

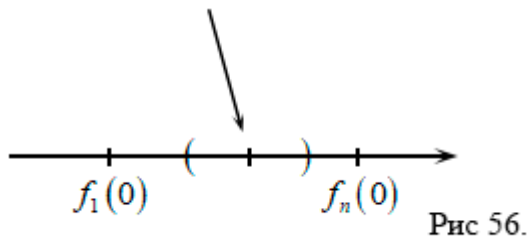
Смысл этой теоремы в том, чтобы распределить ресурсы между k слабейшими пунктами с одинаковыми эффектами отложения.

Доказательство:

x^0 – оптимальное распределение в (I) $\Rightarrow$ (1)

Заметим, что это распределение существует ввиду непрерывности функции $f_i(t)$.

$$\exists k: f_k(0) \leq \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^0) < f_{k+1}(0) \quad (2)$$



$$x_i^0 = 0 \quad \forall i = \overline{k+1, n}$$

От противного: $\exists i_1 \geq k+1: x_{i_1}^0 > 0$

$$z: z_i = \begin{cases} x_{i_1}^0 - \varepsilon, & i = i_1 \\ x_i^0 + \frac{\varepsilon}{n-1}, & i \neq i_1 \end{cases}$$

$$f_i(z_i) > f_i(x_i^0), \quad i \neq i_1$$

$$f_{i_1}(z_{i_1}) = f_{i_1}(x_{i_1}^0 - \varepsilon) > f_{i_1}(0) \geq f_{k+1}(0) > \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^0), \quad i = i_1 \quad (2)$$

Тогда $\min_{1 \leq i \leq n} f_i(z_i) > \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^0)$, что противоречит определению x^0 .

Докажем теперь, что $f_i(x_i^0) = \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^0)$, $i = \overline{1, k}$, также от противного:

$$\exists i_1 \leq k: f_{i_1}(x_{i_1}^0) > \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^0) \geq f_k(0) \geq f_{i_1}(0) \Rightarrow x_{i_1}^0 > 0$$

Аналогично вводим z :
$$z_i = \begin{cases} x_{i_1}^0 - \varepsilon, & i = i_1 \\ x_i^0 + \frac{\varepsilon}{n-1}, & i \neq i_1 \end{cases}$$

$$f_i(z_i) > f_i(x_i^0), \quad i \neq i_1$$

$$f_{i_1}(z_{i_1}) = f_{i_1}(x_{i_1}^0 - \varepsilon) >^{56} \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^0), \quad i = i_1$$

Тогда $\min_{1 \leq i \leq n} f_i(z_i) > \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^0)$, что противоречит определению x^0 .

x^0 – оптимальное распределение в (I) $\Leftarrow$ (1)

$$\forall x \in M_0, \quad x \neq x^0 \quad \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i) \leq \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^0)$$

$$x \neq x^0 \Rightarrow \exists j: 0 < x_j \leq x_j^0$$

$$\min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i) \leq f_j(x_j) < f_j(x_j^0) \stackrel{(1)}{=} \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^0)$$

Единственность получается из этого же неравенства: для любого другого распределения значение будет строго меньше, чем максимальное значение минимума. Теорема доказана.

Алгоритм для нахождения оптимального распределения. Непрерывный случай

Решаем систему с $k+1$ неизвестными:

$$\begin{cases} f_i(x_i^0) = C, & i = \overline{1, k} \\ \sum_{i=1}^k x_i^0 = A \end{cases}$$

Понятно, что $x_i^0 \geq 0$. Прекращаем вычисление, если выполнено условие оптимальности: $C < f_{k+1}(0)$.

⁵⁶ При малом ε сохраняется строгое неравенство (в силу непрерывности функции).

Рассмотрим теперь дискретную задачу:

$$\max_{x \in M'_0} \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i) = \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^*) \quad (I)'$$

Пусть $f_i(t)$ – возрастающая функция дискретного аргумента.

$\forall x \in M'_0$ определим $I(x) = \operatorname{Argmin}_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i)$, $|I(x)|$ – число элементов в этом конечном множестве.

Теорема 3.9.

В сделанных предположениях пусть x^* является оптимальным распределением ресурса в задаче $(I)'$, причем $|I(x^*)|$ – минимально среди всех оптимальных распределений. Тогда необходимо и достаточно:

$$x_j^* > 0 \Rightarrow \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^*) \geq f_j(x_j^* - 1) \quad (3)$$

Можно также написать, что выполнено

$$f_j(x_j^* - 1) \geq \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^*) \geq f_j(x_j^* - 1), \text{ т.е. при положительном вложении эффекты}$$

близки к минимуму.

Доказательство:

x^* – оптимальное распределение, причем $|I(x^*)|$ – минимально $\Rightarrow (3)$

От противного: $\exists j: x_j^* > 0 \quad f_j(x_j^* - 1) > \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^*) = f_j(x_j^*)$

$$z: z_i = \begin{cases} x_j^* - 1, & i = j \\ x_l^* + 1, & i = l \\ x_i^*, & i \neq j, l \end{cases}$$

$$\min_{1 \leq i \leq n} f_i(z_i) \geq \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^*) \quad \overset{x^0 - \text{оптимальное распределение}}{\Rightarrow} \min_{1 \leq i \leq n} f_i(z_i) = \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^*)$$

$I(z) = I(x^*) \setminus \{l\}$, что противоречит условию теоремы.

x^* – оптимальное распределение $(I)'$ $\Leftarrow$ (3)

$$\forall x \in M'_0, \quad x \neq x^* \quad \exists j: x_j < x_j^* \Rightarrow x_j \leq x_j^* - 1$$

$$\min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i) \leq f_j(x_j) \leq f_j(x_j^* - 1) \stackrel{(3)}{\leq} \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^*)$$

Теорема доказана.

Упр. Придумайте пример, когда в задаче $(I)'$ оптимальное распределение x^* не единственно.

Дискретный случай

Выбирается некоторое распределение ресурса $x^{(1)} \in M'_0$. Его можно взять произвольным, но чаще выбирают x^0 для непрерывного случая и округляют его должным образом.

Пусть на k -ом шаге получено распределение $x^{(k)}$. Тогда мы проверяем для него выполнение условия (3):

$$\min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^{(k)}) \geq f_j(x_j^{(k)} - 1)$$

Если условие выполнено, то $x^{(k)}$ – оптимально. В противном случае

$$f_j(x_j^{(k)} - 1) > \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^{(k)})$$

Определим

$$x^{(k+1)}: x_i^{(k+1)} = \begin{cases} x_j^{(k)} - 1, & i = j \\ x_l^{(k)} + 1, & i = l \\ x_i^{(k)}, & i \neq j, l \end{cases}$$

$$1) \quad |I(x^{(k)})| = 1 \Rightarrow \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^{(k+1)}) > \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^{(k)});$$

$$2) \quad |I(x^{(k)})| \geq 2 \Rightarrow \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^{(k+1)}) = \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^{(k)}),$$

$$I(x^{(k+1)}) = I(x^{(k)}) \setminus \{l\}$$

Шаг 2) повторится не более чем n раз⁵⁷, после этого значение минимума возрастет.

Пример. Пусть $n = 4$, $A = 10$. Будем решать задачу поиска $\max_{x \in M_0} \min_{1 \leq i \leq n} i x_i^2$.

$$f_i(t) = it^2, \quad f_i(0) = 0, \quad i = \overline{1,4}$$

$$\begin{cases} i(x_i^0)^2 = C, \quad i = \overline{1,4} \\ \sum_{k=1}^4 x_k^0 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_i^0 = \sqrt{\frac{C}{i}}, \quad i = \overline{1,4} \\ \sum_{k=1}^4 \sqrt{\frac{C}{k}} = 10 \end{cases} \Rightarrow x_i^0 = \frac{10}{\sqrt{i} \cdot \sum_{k=1}^4 \frac{1}{\sqrt{k}}}, \quad i = \overline{1,4}$$

Решим теперь дискретную задачу.

$$x_1^0 \approx 3.59, \quad x_2^0 \approx 2.54, \quad x_3^0 \approx 2.07, \quad x_4^0 \approx 1.8$$

$$x^{(1)} = (4, 3, 2, 1)$$

i	$x_i^{(1)}$	$i(x_i^{(1)})^2$	$i(x_i^{(1)} - 1)^2$	$x_i^{(2)}$	$i(x_i^{(2)})^2$	$i(x_i^{(2)} - 1)^2$
1	4	16	<u>9</u>	3	<u>9</u>	4
2	3	18	<u>8</u>	3	18	<u>8</u>
3	2	12	<u>3</u>	2	12	<u>3</u>
4	1	<u>4</u>	0	2	16	<u>4</u>

Для последних двух столбцов выполняется неравенство (3): $9 > \{8, 3, 4\}$, поэтому

$$x^* = (3, 3, 2, 2)$$

Рассмотрим задачу максимизации суммарной эффективности по всем пунктам:

$$\max_{x \in M_0} \sum_{i=1}^n f_i(x_i) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i^0) \quad (\text{II})$$

Можно сказать, что это капиталистический принцип: максимизируются накопления, но

⁵⁷ Алгоритм конечен.

при этом возникает бедность.

Интерпретируем эту задачу как оптимальное распределение капитала A между n пунктами, при этом $f_i(x_i)$ – прибыль от вложения в i -ый пункт.

Будем считать, что $f_i(t)$ – дифференцируема на отрезке $[0, A]$, но не обязательно возрастает.

Теорема 3.10 (лемма Гиббса⁵⁸).

Пусть x^0 – оптимальное распределение ресурсов в задаче (II). Тогда

$$\exists \lambda: \begin{cases} f'_i(x_i^0) = \lambda, & \text{если } x_i^0 > 0 \\ f'_i(x_i^0) \leq \lambda, & \text{если } x_i^0 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Если функции $f_i(t)$ – вогнуты, то (1) – достаточное условие оптимальности.

Если $f'_1(0) \geq f'_2(0) \geq \dots \geq f'_n(0)$, $\exists f''_i(0) < 0$, $i = \overline{1, n}$, то

$$\exists l: \begin{cases} x_i^0 > 0, & i = \overline{1, l} \\ x_i^0 = 0, & i = \overline{l+1, n} \end{cases}$$

Используя интерпретацию $f_i(t)$ как величину прибыли, можно сказать, что при положительных вложениях нормы прибыли $f'_i(x_i^0)$ должны совпадать.

Доказательство:

x^0 – оптимальное распределение ресурсов в задаче (II) $\Rightarrow$ (1)

$i: x_i^0 > 0$

$$\forall j \neq i \quad \varphi(\varepsilon) = f_i(x_i^0 - \varepsilon) + f_j(x_j^0 + \varepsilon) + \sum_{k \neq i, j} f_k(x_k^0)$$

Можно написать необходимое условие оптимальности в виде: $\varphi'(0) \leq 0$.

⁵⁸ Джозайя Уиллард Гиббс (1839-1903) - американский физик, физикохимик, математик и механик, один из создателей векторного анализа, статистической физики, математической теории термодинамики.

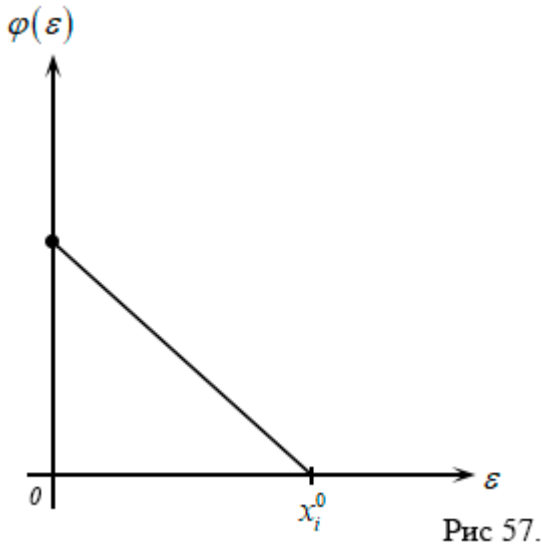


Рис 57.

$$\varphi'(0) = -f_i(x_i^0) + f_j(x_j^0) \leq 0$$

$$f_j(x_j^0) \leq f_i(x_i^0) \quad (2)$$

Аналогично из $x_j^0 > 0$ можно получить

$$f_j(x_j^0) \geq f_i(x_i^0) \quad (3)$$

$$(2) \text{ и } (3) \Rightarrow f_j(x_j^0) = f_i(x_i^0) = \lambda$$

Функции $f_i(t)$ – вогнуты и выполнено условие (1) $\Rightarrow x^0$ – оптимальное распределение ресурсов в задаче (II)

Фактически, нам нужно доказать, что

$$\forall x \in M_0, \quad x \neq x^0 \quad \sum_{i=1}^n f_i(x_i) - \sum_{i=1}^n f_i(x_i^0) \leq 0$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f_i(x_i) - \sum_{i=1}^n f_i(x_i^0) &= \sum_{i=1}^n [f_i(x_i) - f_i(x_i^0)] \leq \sum_{i=1}^n f'_i(x_i^0)(x_i - x_i^0) \leq \\ &\leq \left[x_i^0 = 0 \Rightarrow (x_i - x_i^0) \geq 0, \quad x_i^0 > 0 \Rightarrow f'_i(x_i^0) = \lambda \right] \leq \lambda \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0) = \lambda(A - A) = 0 \end{aligned}$$

Осталось доказать последнее утверждение теоремы. От противного:

$$x^0 : \exists i : x_i^0 = 0, \text{ но } x_{i+1}^0 > 0$$

$f_i(x_i^0) = f_i(0) \stackrel{(1)}{\leq} \lambda \stackrel{(1)}{=} f_{i+1}'(x_{i+1}^0) < f_{i+1}'(0)$, но тогда производные не упорядочены.

Пришли к противоречию. Теорема доказана.

Лекция XVIII

Задача поиска объекта

Рассмотрим *пример* на использование леммы Гиббса.

Предположим, необходимо осуществить поиск объекта в некоторой области (разбитой на подобласти). Время поиска ограничено и равно A . Если объект находится в i -ой области, то условная вероятность его обнаружения в течение времени t равна

$$1 - e^{-\mu_i t}, \quad \mu_i > 0$$

Пусть $p_i > 0$ – априорная вероятность того, что объект находится в i -ой области и

пусть $x = (x_1, \dots, x_n) \in M_0$ – вектор распределения времени поиска. Максимизируется

при этом полная вероятность обнаружения объекта: $\sum_{i=1}^n p_i (1 - e^{-\mu_i x_i}) \rightarrow \max_{x \in M_0}$

$$f_i(t) = p_i (1 - e^{-\mu_i x_i})$$

Эти функции являются вогнутыми, так как $f'_i(t) = p_i \mu_i e^{-\mu_i x_i}$ и вторая производная, очевидно, отрицательна.

Без потери общности, можно считать, что производные в нуле упорядочены:

$$f'_i(0) = p_i \mu_i \quad \text{и} \quad p_1 \mu_1 \geq p_2 \mu_2 \geq \dots \geq p_n \mu_n.$$

Применим тогда лемму Гиббса.

$$\begin{cases} p_i \mu_i e^{-\mu_i x_i^0} = \lambda, \quad i = \overline{1, l} \\ \sum_{i=1}^l x_i^0 = A \end{cases}$$

Получаем $l + 1$ уравнений и неизвестных.

Решаем их, учитывая второе условие теоремы:

$$f'_n(0) \leq \dots \leq f'_{l+1}(0) = p_{l+1} \mu_{l+1} \leq \lambda$$

Нам осталось рассмотреть последнюю задачу максимизации суммарной эффективности

для дискретного случая:

$$\max_{x \in M'_0} \sum_{i=1}^n f_i(x_i) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i^*) \quad (\Pi)'$$

Потребуем следующее условие:

$$\forall 0 < t < A, t \in \mathbb{Z} \quad f_i(t) - f_i(t-1) \geq f_i(t+1) - f_i(t), \quad i = \overline{1, n}^{59} \quad (2)$$

Лемма. Пусть $f_i(t)$ удовлетворяет условию (2). Тогда:

$$1) \quad \forall t > t_0 \quad f_i(t) - f_i(t_0) \geq (f_i(t_0 + 1) - f_i(t_0))(t - t_0);$$

$$2) \quad \forall t < t_0 \quad f_i(t) - f_i(t_0) \geq (f_i(t_0) - f_i(t_0 - 1))(t - t_0).$$

Доказательство:

$$1) \quad t > t_0 \quad f_i(t) - f_i(t_0) = \underbrace{f_i(t) - f_i(t-1)} + \underbrace{f_i(t-1) - f_i(t-2)} + \dots + \underbrace{f_i(t_0 + 1) - f_i(t_0)} \leq (f_i(t_0 + 1) - f_i(t_0))(t - t_0)$$

$$2) \quad t < t_0 \quad f_i(t_0) - f_i(t) = \underbrace{f_i(t_0) - f_i(t_0 - 1)} + \underbrace{f_i(t_0 - 1) - f_i(t_0 - 2)} + \dots + \underbrace{f_i(t+1) - f_i(t)} \geq (f_i(t_0) - f_i(t_0 - 1))(t_0 - t)$$

Теорема 3.11 (критерий Гросса⁶⁰).

Пусть x^* – оптимальное распределение ресурсов в задаче $(\Pi)'$. Тогда необходимо и достаточно, что

$$x_j^* \Rightarrow f_j(x_j^*) - f_j(x_j^* - 1) \geq \max_{1 \leq i \leq n} [f_i(x_i^* + 1) - f_i(x_i^*)] = \lambda \quad (3)$$

Фактически, это дискретный принцип уравнивания для дискретных производных.

Действительно, $f_j(x_j^*) - f_j(x_j^* - 1) \geq \lambda \geq f_j(x_j^* + 1) - f_j(x_j^*)$, т.е. дискретная

⁵⁹ По сути, это дискретная производная.

⁶⁰ Бенедикт Хайман Гросс (1950) - американский математик, занимается изучением теории чисел и теоремой Гросса-Загье.

производная близка к λ .

Доказательство:

x^* – оптимальное распределение ресурсов задачи $(\Pi)'$ $\Rightarrow$ (3)

Пусть (3) не выполнено. Тогда

$$\exists j: x_j^* > 0 \Rightarrow f_j(x_j^*) - f_j(x_j^* - 1) < \max_{1 \leq i \leq n} [f_i(x_i^* + 1) - f_i(x_i^*)] = f_l(x_l^* + 1) - f_l(x_l^*)$$

$$z: z_i = \begin{cases} x_j^* - 1, & i = j \\ x_l^* + 1, & i = l \\ x_i^*, & i \neq j, l \end{cases}$$

$$f_j(x_j^*) - f_l(x_l^*) < \underbrace{f_l(x_l^* + 1)}_{z_l} + \underbrace{f_j(x_j^* - 1)}_{z_j}, \text{ что есть противоречие, т.к. суммарный}$$

эффект возрастет, хотя x^* – оптимальное распределение ресурсов.

Пусть для некоторого x^* выполнено (3) $\Rightarrow x^*$ – оптимальное распределение ресурсов задачи $(\Pi)'$

$$\forall x \neq x^*, x \in M'_0 \quad \sum_{i=1}^n f_i(x_i) - \sum_{i=1}^n f_i(x_i^*) \leq 0$$

Нам достаточно показать справедливость неравенства

$$f_i(x_i) - f_i(x_i^*) \leq \lambda(x_i - x_i^*), \quad i = \overline{1, n}, \quad (4)$$

поскольку суммирование по i и даст нам искомое неравенство.

Воспользуемся доказанной леммой:

$$x_i > x_i^* \quad f_i(x_i) - f_i(x_i^*) \leq \overbrace{(f_i(x_i^* + 1) - f_i(x_i^*))}^{\leq \lambda} \overbrace{(x_i - x_i^*)}^{> 0} \leq \lambda(x_i - x_i^*)$$

$$0 \leq x_i < x_i^* \quad f_i(x_i) - f_i(x_i^*) \leq \overbrace{(f_i(x_i^*) - f_i(x_i^* - 1))}^{\geq \lambda} \overbrace{(x_i - x_i^*)}^{< 0} \leq \lambda(x_i - x_i^*)$$

Тем самым неравенства (4) доказаны и теорема справедлива.

Алгоритм нахождения оптимального распределения ресурсов в задаче $(\Pi)'$.

Возьмем, вообще говоря, произвольное⁶¹ распределение x^1 . Положим, на k -ом шаге мы проверяем условие (3). Если оно выполнено, то оптимальное распределение найдено. В противном случае:

$$x_j^k > 0 \Rightarrow f_j(x_j^k) - f_j(x_j^k - 1) < \max_{1 \leq i \leq n} [f_i(x_i^k + 1) - f_i(x_i^k)] = f_l(x_l^k + 1) - f_l(x_l^k)$$

$$x^{(k+1)} : x_i^{(k+1)} = \begin{cases} x_j^* - 1, & i = j \\ x_l^* + 1, & i = l \\ x_i^*, & i \neq j, l \end{cases}$$

$$f_j(x_j^k) + f_l(x_l^k) < f_j(x_j^{(k+1)}) + f_l(x_l^{(k+1)})$$

Упр. Сформулируйте необходимое и достаточное условие оптимальности для

$$\min_{x \in M_0} \sum_{i=1}^n f_i(x_i) \text{ при условии, что функции } f_i(x_i) \text{ — выпуклы.}$$

⁶¹ Лучше взять округленное решение x^0 непрерывной задачи.



ФАКУЛЬТЕТ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
МАТЕМАТИКИ И
КИБЕРНЕТИКИ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА



teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ